## EXAMEN DE MATURITATE - CRAIOVA 1957

**1.** Se consideră polinomul $P(X) = X^4 + mX^3 + nX^2 + 5X + p$. Să se determine $m$, $n$, $p$ astfel încât polinomul $P(X)$ să fie divizibil cu $X^3 - 2X^2 - X + 2$, apoi să se rezolve ecuaţia $P(x) = 0$.

**2.** Se consideră ecuaţia $x^2 - 2(m+1)x + 2(m-1) = 0$, în care $m$ este un parametru real. Se cere:

**a)** să se arate că rădăcinile acestei ecuaţii sunt reale, oricare ar fi valorile lui $m$;

**b)** să se determine $m$ astfel încât între rădăcini să existe relaţia $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} < \dfrac{1}{2}\cdot$

**3.** Să se simplifice fracţia $F = \dfrac{\sin^2 7x - \sin^2 4x}{\cos^2 5x - \cos^2 6x}\cdot$

**4.** Pe semicercul de diametru $AB = 2R$ se consideră arcul $\overset{\frown}{AmC} = 120°$. Dreapta $AC$ taie tangenta în $B$ la semicerc în punctul $D$. Triunghiul $ABD$ se roteşte în jurul dreptei $AD$. Să se arate că raportul ariilor laterale ale celor două conuri astfel obţinute este $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, iar raportul volumelor este $\dfrac{1}{3}\cdot$ Figura limitată de arcul $\overset{\frown}{AmC}$ şi coarda $AC$ se roteşte în jurul diametrului $AB$. Să se calculeze volumul corpului obţinut.

**5.** Se consideră o piramidă cu baza un dreptunghi $ABCD$ şi vârful în punctul $S$. Să se afle aria laterală şi volumul piramidei cunoscând $\widehat{SAB} = \alpha$, $\widehat{SAD} = \beta$, $SA = SB = SC = SD = a$.

**EXAMEN DE MATURITATE - IAŞI 1957**

**1.** Se dă ecuaţia de gradul al doilea în $x$:
$$(m-1)x^2 - 2mx + 3 = 0.$$
Să se determine valorile lui $m$ pentru care
$$\frac{1+x_1}{1-x_2} + \frac{1+x_2}{1-x_1} \geq 8,$$
unde $x_1$ şi $x_2$ sunt rădăcinile ecuaţiei date.

**2.** Să se pună expresia
$$E = \frac{2\sin b \cdot \cos a \cdot (\text{tg } a + \text{tg } b)}{1 - \cos(a+b)} + \frac{\sin \dfrac{a-b}{2}}{\cos b \cdot \sin \dfrac{a+b}{2}}$$
sub forma cea mai simplă.

**3.** Să se găsească toate soluţiile ecuaţiei
$$4\sin^4 x + 2\cos 2x = 1 + 3\sin^2 2x$$
cuprinse între $0°$ şi $360°$.

**4.** Să se găsească toate soluţiile ecuaţiei trigonometrice
$$\sqrt{2}(\text{ctg } x - \text{tg } x) = 4(\sin x + \cos x)$$
cuprinse între $0°$ şi $360°$.

**5.** Se dă triunghiul isoscel $ABC$ cu $AB = BC = a$ cm şi $AC = b$ cm. Prin centrul $O$ al cercului înscris în acest triunghi se duce o perpendiculară $OS$ pe planul $ABC$. Unghiul diedru al planelor $ABC$ şi $ASB$ este $\varphi$. Se cere aria totală şi volumul tetraedrului $SABC$. Caz particular: $a = 20$ cm, $b = 24$ cm, $\varphi = 60°$.

**6.** O piramidă triunghiulară cu vârful $S$ şi baza $ABC$ are muchiile $SA$, $SB$, $SC$ egal înclinate pe planul $ABC$ cu un unghi $\varphi$. Triunghiul $ABC$ are $AB = 2a$, $\widehat{CAB} = \widehat{CBA} = \alpha$. Se cere aria totală a piramidei.

**7.** Pe segmentul $AB = 2a$ ca diametru se descrie un semicerc. Fie $M$ un punct pe segmentul $[AB]$ şi notăm $AM = x$. Perpendiculara prin $M$ pe $AB$ taie semicercul în $N$. Dreapta $BN$ taie în $P$ tangenta în $A$ la semicerc.

Să se determine valorile lui $x$ pentru care volumul corpului obţinut prin rotirea triunghiului $ABP$ în jurul lui $AB$ este egal cu dublul volumului corpului obţinut prin rotirea triunghiului $APN$ în jurul lui $AB$.

**8.** Un trunchi de piramidă are feţele laterale egal înclinate pe baza mare cu un unghi $\varphi$. Cele două baze ale trunchiului de piramidă sunt trapeze isoscele cu raportul de asemănare $k < 1$. Baza mare a piramidei are laturile neparalele egale respectiv cu $2a$ şi $2b$. Se cere volumul şi aria laterală a trunchiului de piramidă.

**9.** Fie $P$ un punct exterior unui cerc de centru $O$ şi rază $r$. Notăm $OP = x$. Dreapta $OP$ taie cercul în $A$ şi $B$ (punctul $B$ fiind cuprins între $O$ şi $P$). Tangentele din $P$ la cerc ating cercul în $C$ şi $C'$.

- **a)** Să se afle aria suprafeţei obţinută prin rotirea în jurul lui $AB$ a conturului compus din arcul $\widehat{CAC'}$ şi segmentele $[C'P]$ şi $[PC]$, precum şi volumul interior acestei suprafeţe.
- **b)** Să se determine $x$ în cazul în care raportul dintre volumul determinat mai sus şi volumul sferei de rază $r$ este $m$ şi să se discute soluţiile ecuaţiei în $x$ când $m$ este variabil.

**10.** Într-un trapez isoscel $ABCD$ se dă baza mare $AB = 2a$, baza mică $CD = 2b$ şi înălţimea $h$. Fie $M$ şi $N$ respectiv mijloacele bazelor $AB$ şi $CD$, iar $I$ punctul de intersecţie al diagonalelor.

- **a)** Să se arate că raportul $\lambda$ între volumul solidului obţinut din acest trapez şi suma volumelor conurilor obţinute din triunghiurile $AMI$ şi $INC$ prin rotirea în jurul dreptei $MN$ nu depinde de $h$.
- **b)** Să se afle raportul $x = \dfrac{a}{b}$ în funcţie de $\lambda$ şi să se discute valorile lui $x$ când $\lambda$ este variabil.

## EXAMEN DE MATURITATE - BUCUREŞTI 1957

**1.** **a)** Să se formeze ecuaţia de gradul al doilea cunoscând suma $S = 2(m-1)$ a rădăcinilor şi realizantul $R = 4(m^2 - m - 2)$.

**b)** Rădăcinile acestei ecuaţii fiind $x_1$ şi $x_2$, să se determine $m$ astfel încât $\dfrac{x_1^2}{x_2} + \dfrac{x_2^2}{x_1} = 2$.

**2.** Să se rezolve ecuaţia

$$m \cos 2x + 2(m^2+3)\sin x - 7m.$$

Între ce valori trebuie să varieze $m$, pentru ca ecuaţia să admită rădăcini reale?

**3.** Se dau două cercuri cu centrele $O$ şi $O'$, cu razele $R = 3$ cm şi $R' = 4$ cm şi cu distanţa centrelor $OO' = 5$ cm. Fie $A$ şi $B$ punctele de intersecţie a celor două cercuri. Se duc tangentele comune exterioare care se intersectează în punctul $S$. Se notează cu $T$ şi $T'$ punctele de contact ale uneia dintre aceste tangente cu cele două cercuri. Prin punctul $A$ de intersecţie a celor două cercuri se duc două secante oarecare, care taie cercul de centru $O$ în punctele $C$, $D$, iar celălalt cerc în punctele $C'$, $D'$. Se cere:

**a)** să se calculeze lungimea segmentelor $[TT']$ şi $[SO']$;

**b)** să se arate că dreptele $CD$ şi $C'D'$ sunt perpendiculare;

**c)** să se afle aria corpului rezultat prin rotirea cercurilor în jurul dreptei $OO'$.

**4.** O piramidă cu vârful $S$ şi baza un dreptunghi $ABCD$ are muchiile egale cu $m$, muchia sa formând cu latura $AB$ un unghi $\alpha$ şi cu latura $AD$ unghiul $\beta$. Se cere:

**a)** Să se afle aria laterală şi volumul piramidei.

**b)** Să se determine unghiurile $\alpha$ şi $\beta$ ştiind că $\alpha - \beta = 45°$, iar aria laterală a piramidei este egală cu $\dfrac{m^2\sqrt{6}}{2}$.

**5.** Într-o sferă de rază $r$ se înscrie un con a cărui generatoare face cu planul bazei un unghi $u$ dat de ecuaţia:

$$\frac{\cos u}{1+\sin u} = 2 - \operatorname{tg} u.$$

**a)** Să se determine la ce distanţă de baza conului trebuie să se ducă un plan paralel bazei conului, astfel ca diferenţa ariilor secţiunilor determinate în sferă şi con să fie egală cu aria bazei conului.

**b)** Să se afle în funcţie de $r$ volumul tetraedrului regulat circumscris sferei.

## EXAMEN DE MATURITATE - TIMIŞOARA 1957

**1.** Să se rezolve ecuaţia

$$\log_{z^2}(x^2 - 2ab) + \log_z(x^2 - 2ab) = 3,$$

în care $z = \sqrt{a^2 + b^2}$.

**2.** Să se rezolve ecuaţia

$$2\mathrm{arctg}\ x + \mathrm{arcsec}\ 5x = \frac{\pi}{2}\cdot$$

**3.** Se consideră o sferă; perpendicular pe mijlocul unei raze $OA$ se duce un plan care taie sfera după un cerc $\mathscr{C}$, în care latura pătratului înscris este egală cu $a$. Se prelungeşte raza $OA$ până înţeapă a doua oară sfera în $B$. Se cere volumul conului care are vârful în $B$ şi baza cercul $\mathscr{C}$.

**4.** Se consideră un cerc cu diametrul $[AB]$. Tangentele la cerc în punctele $A$ şi $B$ sunt intersectate în $C$ şi $D$ de o a treia tangentă la cerc. Figura $ABCD$, rotită în jurul lui $AB$ dă naştere unui trunchi de con. Se cere volumul acestui corp, cunoscând raza $R$ şi $CD = a$.