EXAMEN DE MATURITATE 1961

1. Se dă ecuaţia $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$. Se cere:

a) să se rezolve ecuaţia ştiind că o rădăcină este egală cu suma celorlalte două rădăcini;

b) să se reprezinte grafic funcţia $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$.

2. Dintr-o bilă sferică de rază R se confecţionează prin strunjire un con circular drept astfel ca să aibă deschiderea la vârf (unghiul format de două generatoare) egală cu $2x$. Se cere:

a) să se exprime aria laterală, totală şi volumul conului în funcţie de R şi x.

b) pentru ce valoare a lui x volumul este egal cu $\dfrac{9}{32}$ din volumul sferei?

3. Se dă parabola $y^2 = 2px$ şi un punct $A(a, b)$.

a) Să se scrie ecuaţia de gradul al doilea care dă coeficienţii unghiulari m_1 şi m_2 ai tangentelor duse din A la parabolă.

b) Să se afle locul geometric al punctului A, ştiind că între m_1 şi m_2 avem relaţia $m_1 m_2 (m_1 + m_2)$.

c) Să se găsească punctele de intersecţie ale parabolei date cu locul geometric aflat.

4. Tangenta într-un punct M al unei hiperbole echilatere cu centrul în origine, taie axele Ox şi Oy în punctele A şi B. Să se arate că cercul de diametru $[AB]$ este tangent în origine dreptei OM.

5. Să se reprezinte grafic funcţia $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-3}$ (pentru uşurinţa calcului derivatei nu se aduce la acelaşi numitor).

6. Se dau punctele $A(-a, 0)$ şi $B(a, 0)$. Prin A se duce o dreaptă de coeficient unghiular m variabil, iar din B se duce perpendiculara pe dreapta dusă din A.

a) Să se afle locul geometric al punctului M în care se taie dreptele de mai sus.

b) Dreapta AM taie pe Oy în punctul C. Să se scrie ecuaţia locului geometric al punctului P în care paralela dusă din C la Ox taie pe BM.

c) Fie T proiecţia lui P pe Ox. Să se deducă geometric, folosind asemănarea triunghiurilor AOC şi BTP, relaţia dintre coordonatele x şi y ale punctului P.

7. Se dă sistemul de axe ortogonale xOy, dreapta (D) care are ecuaţia $x = 2$, dreapta (D') de ecuaţie $x = -4$, punctele $A'(-8, 0)$, $A(8, 0)$ şi punctul P variabil pe axa Oy. Se cere:

a) Să se scrie ecuaţia cercului circumscris triunghiului $\triangle PAA'$.

b) Fie M intersecţia dreptei AP cu dreapta (D) şi M' intersecţia dreptei PA' cu dreapta (D'). Să se arate că dreapta MM' trece printr-un punct fix şi să se determine coordonatele acestui punct.