EXAMEN DE BACALAUREAT 1965
SESIUNEA IUNIE

1. Raportat la un sistem de axe ortogonal, se dă cercul $x^2 + y^2 - 4y = 0$ şi o dreaptă $(d) : y = \lambda$. Dreapta (d) intersectează cercul în punctele A şi B care se proiectează pe axa Ox în punctele A' şi B'. Notăm cu M mijlocul segmentului $[OA]$ şi cu N mijlocul segmentului $[BM]$. Se cere:

- **a)** Locul geometric al punctului M.
- **b)** Pentru ce poziţie a dreptei (d) avem $AN = ON$?
- **c)** Să se calculeze aria dreptunghiului $AA'BB'$ în funcţie de λ, să se studieze variaţia acestei arii şi să se construiască graficul.
- **d)** Să se discute (cu ajutorul teoremei lui Rolle) condiţia ca această arie să fie egală cu K, $K > 0$.

2. Se dă o sferă de rază R căreia i se circumscrie un con circular drept.

- **a)** Dacă se notează cu x înălţimea conului, să se arate că volumul conului este $\dfrac{\pi R^2 x^2}{3(x - 2R)}$.
- **b)** Să se studieze variaţia volumului conului în funcţie de x.
- **c)** Să se determine x astfel ca volumul conului să fie de K ori volumul sferei.
- **d)** Dacă se notează cu α unghiul pe care generatoarea conului îl face cu planul bazei, să se afle aria totală a conului în funcţie de R şi α.

SESIUNEA AUGUST

1. Se dă funcţia $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4}{4x}$ şi se cere:

- **a)** Să se studieze variaţia şi să se reprezinte graficul funcţiei.
- **b)** Se consideră curba $y = \dfrac{3x^2 + 4}{4x}$ şi un punct $M(p, q)$. Să se calculeze în funcţie de p, distanţa de la punctul M la dreapta $3x - 4y = 0$. Să se afle limita acestei distanţe când $p \to \infty$. Să se exprime rezultatul.
- **c)** Dacă notăm cu u unghiul pe care dreapta $3x = 4y$ îl face cu direcţia pozitivă a axei Ox, să se calculeze $\sin 2u$.

2. Raportate la acelaşi sistem xOy de axe ortogonale, se dau curbele $x^2 + y^2 - 7x + y = 0$ şi $y^2 = 4x$. Se cere:

- **a)** Să se figureze aceste curbe.
- **b)** Să se formeze ecuaţia care dă coordonatele punctelor celor două curbe şi să se rezolve ştiind că are o rădăcină dublă. Să se deducă faptul că cele două curbe au comune: punctul $A(1, 2)$, punctul $B(4, -4)$ şi originea.
- **c)** Să se scrie ecuaţiile normalelor în A şi B la curba $y^2 = 4x$ şi să se afle coordonatele punctului lor de intersecţie C.
- **d)** Să se scrie ecuaţia cercului cu centrul în C care trece prin punctul A.
- **e)** Să se găsească ecuaţia care dă coordonatele punctelor comune acestui cerc şi curbei $y^2 = 4x$ şi să se arate că această ecuaţie are o rădăcină triplă.

3. Cercul cu centrul în origine şi rază R taie semiaxa Ox în punctul A. În acest cerc se înscrie un hexagon regulat, cu un vârf în A, ale cărui vârfuri sunt notate în sens direct $ABCDEF$. Se cere:

- **a)** Să se determine coordonatele vârfurilor hexagonului.
- **b)** Diagonala AC taie axa Oy în M. În punctul M se ridică o perpendiculară pe AC, care intersectează diagonala CE în punctul P. Să se afle locul geometric al punctului P când R variază.
- **c)** Dacă vârfurile hexagonului regulat sunt imaginile unor numere complexe, să se găsească ecuaţia care admite ca rădăcini aceste numere.