EXAMEN DE BACALAUREAT 1966
SESIUNEA IUNIE

1. Un triunghi ABC are latura $BC = a$, unghiul $B = t$ şi unghiul $C = t + 90°$, $t > 0$.

a) Să se afle intervalul de variaţie al lui t pentru ca triunghiul să existe.

b) Să se afle aria triunghiului în funcţie de a şi t şi să se aducă la forma $S = \frac{a^2}{4}\text{tg } 2t$.

c) Să se determine t, astfel ca aria triunghiului să fie egală cu $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

d) Să se calculeze aria corpului care ia naştere prin rotaţia completă a triunghiului ABC în jurul laturii BC pentru $t = 30°$.

e) Considerând dreapta BC ca axă Ox şi perpendiculara ridicată în mijlocul segmentului $[BC]$ pe BC ca axă Oy, să se afle ecuaţia locului geometric al punctului A, când t variază.

f) Să se determine coordonatele punctului M situat pe acest loc geometric şi care se află la distanţa minimă de punctul $D(0, 2a)$. Să se calculeze această distanţă minimă.

2. Se consideră funcţia $f(x) = \frac{5 - x}{x^2 - 5x + 4}$.

a) Să se afle coordonatele punctelor de extrem ale graficului funcţiei.

b) Să se arate că dreapta determinată de cele două puncte de extrem mai întâlneşte graficul funcţiei în încă un punct şi să se afle coordonatele acestui punct.

c) Să se determine intervalele pe care funcţia $f(x)$ ia valori mai mari decât $\frac{5}{4}$.

d) Să se cerceteze numărul extremelor funcţiei $g(x) = \frac{m - x}{x^2 - 5x + 4}$.

3. Se dă un triunghi isoscel ABC ($AB = AC$) care are baza $BC = 2a$ şi unghiul $ABC = 2x$. Din punctul O, mijlocul bazei, se duc perpendicularele OD şi OE, respectiv pe laturile AB şi AC.

a) Să se afle aria triunghiului OED în funcţie de a şi x.

b) Să se determine unghiul x astfel ca aria triunghiului OED să fie egală cu $\frac{3}{16}$ din aria triunghiului ABC.

4. Se dau ecuaţiile $x^2 - y^2 = 5$ şi $xy = 6$.

a) Să se spună ce curbă reprezintă fiecare ecuaţie, să se determine elementele importante şi să se reprezinte grafic.

b) Să se afle coordonatele punctelor de intersecţie ale celor două curbe.

c) Să se scrie ecuaţiile tangentelor la cele două curbe în punctul lor de intersecţie din primul cadran şi să se verifice că ele sunt perpendiculare.

d) Tangenta la prima curbă în punctul de intersecţie al celor două curbe, din primul cadran, intersectează asimptotele acestei curbe în punctele A şi B, iar tangenta la curba a doua în acelaşi punct intersectează asimptotele curbei a doua în punctele C şi D. Să se arate că punctele A, B, C, D sunt vârfurile unui pătrat, apoi să se scrie ecuaţia cercului înscris în acest pătrat.

5. Se dă ecuaţia $3x^3 - 7x^2 - mx - 1 = 0$.

a) Să se determine m astfel ca ecuaţia să admită două rădăcini egale.

b) Să se studieze natura rădăcinilor ecuaţiei când parametrul m variază.

c) Să se studieze variaţia funcţiei $f(x) = 3x^2 - 7x - \frac{1}{x}$ şi să se reprezinte grafic.

SESIUNEA AUGUST

1. Se dă funcţia $f(x) = \dfrac{3x^2+4}{4x}$.

a) Să se studieze şi să se reprezinte grafic variaţia funcţiei.

b) Se consideră pe curbă un punct variabil M, de abscisă p. Să se calculeze, în funcţie de p, distanţele de la punctul M la dreptele $x = 0$ şi $3x - 4y = 0$ şi să se arate că produsul acestor distanţe este constant.

c) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în punctul $A(2, 2)$. Să se arate că punctul A este mijlocul segmentului de pe această tangentă, cuprins între dreptele $x = 0$ şi $y = \dfrac{3}{4}x$.

2. Se dă ecuaţia $xy = 2$ şi punctele $A(2, 2)$ şi $B(-2, -2)$.

a) Să se spună ce curbă reprezintă această ecuaţie şi să se determine elementele ei importante.

b) Să se scrie ecuaţia tangentei la această curbă în punctul $C(2, 1)$.

c) Se consideră pe curbă un punct mobil M de abscisă p. Să se calculeze, în funcţie de p, distanţele MA şi MB, apoi să se verifice că $MA - MB =$ constant. Să se explice acest rezultat.

d) Să se determine intervalele în care k poate lua valori, astfel ca dreptele fascicolului $y = -x+k$ să intersecteze curba $xy = 2$.

e) Dacă k este cuprins în intervalele corespunzătoare, atunci o dreaptă oarecare $y = -x+k$ taie curba în două puncte P_1, P_2. Să se afle locul geometric al punctului P, mijlocul segmentului $[P_1P_2]$, când k parcurge intervalele respective.

3. Se dă funcţia $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{16-x^2}}$.

a) Să se studieze variaţia şi să se reprezinte grafic.

b) Un punct oarecare M (diferit de origine) situat pe graficul acestei funcţii se proiectează pe axa Ox în M_1 şi pe axa Oy în M_2. Să se arate că dreapta M_1M_2 este tangentă la hiperbola $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} - 1 = 0$.

c) Să se cerceteze separat cazul când M coincide cu originea.

d) Să se calculeze $f(4 \sin t)$.

4. Se dă ecuaţia

$$x^3 + (2 - \sqrt{9a+10})x^2 + 11 - 3\sqrt{a-2} = 0.$$

a) Să se determine a astfel ca suma rădăcinilor ecuaţiei să fie egală cu produsul lor.

b) Să se rezolve ecuaţia când $a = 6$.

c) Să se reprezinte grafic funcţia $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.