EXAMEN DE BACALAUREAT 1967
SESIUNEA IUNIE

1. Se dă un sistem de axe de coordonate rectangulare xOy şi punctul $C(a,0)$. Se consideră cercul cu centrul în C tangent la axa Oy şi coarda AB paralelă la Oy care intersectează axa Ox în D astfel ca $OD = p$.

a) Să se afle aria triunghiului OAB, apoi să se găsească relaţia dintre a şi p pentru ca această arie să fie maximă.

b) Să se arate că volumul corpului care ia naştere prin rotirea triunghiului OAB în jurul axei Oy este

$$V = \frac{4\pi}{3}p^2\sqrt{2ap - p^2},$$

apoi să se studieze variaţia acestui volum cân a este constant şi p este variabil. Să se calculeze $\operatorname{tg}(\sphericalangle OAB)$ în cazul coardei AB corespunzătoare corpului de volum maxim.

c) Perpendiculara în O pe OB şi paralela prin A la Ox se intersectează în punctul M. Să se găsească locul geometric al mijlocului segmentului (OM), când a este constant şi p variabil.

2. **a)** Să se studieze variaţia funcţiei

$$f(x) = \frac{1}{6}x(x-3)(x-8)$$

şi să se reprezinte grafic.

b) Să se determine m astfel ca ecuaţia $f(x) = m$ să admită o rădăcină dublă şi să se rezolve în acest caz.

c) Să se arate că dacă funcţia $f(x)$ admite pentru $x = x_0$ un extrem a cărui valoare este y_0, atunci ecuaţia $f(x) = y_0$ admite pe x_0 ca rădăcină dublă.

d) Se dă ecuaţia $x^3 - 11x^2 + 24x + 144\sin^2 a = 0$, unde x este necunoscută şi a un parametru real. Să se determine valorile lui a în intervalul $(0, 2\pi)$ pentru care suma a două rădăcini este egală cu 5.

3. Se dă cercul $(\mathscr{C})$ de ecuaţie $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ şi un punct mobil M pe acest cerc. Fie $(\mathscr{C}_1)$ cercul cu centrul în M şi tangent în P la axa Ox, iar $(\mathscr{C}_2)$ cercul cu centrul în M şi tangent în Q la axa Oy. Fie DE coarda comună a cercurilor $(\mathscr{C})$ şi $(\mathscr{C}_1)$, iar FG coarda comună a cercurilor $(\mathscr{C})$ şi $(\mathscr{C}_2)$. Dreptele MP şi DE se intersectează în I, iar dreptele MQ şi FG se intersectează în H.

a) Să se arate că punctul I este mijlocul segmentului $[MP]$.

b) Să se afle locul geometric al punctului I când M variază pe cercul $(\mathscr{C})$.

c) Să se arate că suma distanţelor punctului O la dreptele DE şi FG este constantă atunci când M parcurge cercul $(\mathscr{C})$.

d) Să se exprime aria triunghiului IOH în funcţie de abscisa punctului M şi de raza cercului $(\mathscr{C})$ când M descrie cercul $(\mathscr{C})$.

4. Se dă parabola $y^2 = 2x$ şi cercul $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Se consideră punctul P mobil pe parabolă, din care se duc tangente la cerc ale căror puncte de contact se notează cu A şi B.

a) Să se exprime lungimea coardei AB în funcţie de abscisa t a punctului P şi să se arate că:

$$AB = 2\sqrt{\frac{t^2 + 2t - 1}{t^2 + 2t}}.$$

b) Să se exprime abscisa punctului P astfel ca lungimea coardei AB să fie egală cu latura pătratului înscris în cerc.

c) Să se studieze variaţia lungimii coardei AB când P se deplasează pe parabolă şi să se reprezinte grafic.

SESIUNEA AUGUST

1. Se dă cercul $x^2 + y^2 - 9 = 0$ şi punctul $P(5, 0)$. Prin P se duce dreapta variabilă (d). Se cere:

- **a)** Între ce valori trebuie să fie cuprins coeficientul unghiular al dreptei (d) pentru ca ea să intersecteze cercul?
- **b)** Să se scrie ecuaţiile tangentelor la cerc duse din punctul P, apoi să se calculeze sinusul unghiului format de aceste două tangente.
- **c)** Fie A şi B punctele în care dreapta variabilă (d) intersectează cercul, $PA = PB$. Să se afle locul geometric al punctului M, mijlocul segmentului $[AB]$.
- **d)** Notăm cu A' şi B' proiecţiile punctelor A şi B pe axa Ox. Să se exprime mărimea segmentului $[A'B']$ în funcţie de coeficientul unghiular m al dreptei (d) şi să se studieze variaţia funcţiei $f(m)$ astfel obţinută.

2. Se dă ecuaţia $x^3 + 3x^2 - ax + 5 = 0$ şi se cere:

- **a)** Să se rezolve ecuaţia şi să se determine a ştiind că între rădăcinile ecuaţiei avem relaţia $x_1 + x_2 = x_3$.
- **b)** Să se studieze şi să se reprezinte grafic funcţia
$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^3 + 5}{x}.$$
- **c)** Să se discute după valorile parametrului a numărul punctelor în care dreapta $y = a$ intersectează graficul funcţiei $f(x)$.
- **d)** Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f(x)$ în punctul de abscisă $x = -1$. Dacă v este unghiul format de această tangentă cu semiaxa Ox, să se calculeze $\sin 2v$.

3. Se dă funcţia $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{3x+1}}$ şi se cere:

- **a)** Să se studieze variaţia funcţiei şi să se reprezinte grafic.
- **b)** Să se determine mulţimea valorilor funcţiei.
- **c)** Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ astfel ca $f(a) = \dfrac{5}{2}$.
- **d)** Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în punctul de abscisă 5.

4. Se dă un tetraedru regulat cu muchia egală cu a.

- **a)** Să se determine cosinusul unghiului pe care muchia laterală îl formează cu planul bazei.
- **b)** Să se afle aria secţiunii făcută în tetraedru printr-un plan care trece printr-o muchie a bazei şi este perpendicular pe muchia laterală opusă.
- **c)** Se consideră secţiunea făcută în tetraedru printr-un plan determinat de o muchie a sa şi de un punct M situat pe muchia opusă. Să se exprime aria S a acestei secţiuni în funcţie de a şi de distanţăa x a punctului M la una din extremităţile muchiei pe care este situat. Să se studieze variaţia funcţiei $S(x)$ astfel obţinută, când M parcurge muchia respectivă.
- **d)** Să se determine unghiul diedru dintre planul acestei secţiuni şi planul bazei, când aria secţiunii este maximă.