EXAMEN DE BACALAUREAT 1968
SESIUNEA IUNIE

1. Se dau cercurile $x^2 + y^2 - 25 = 0$ şi $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 35 = 0$ şi se cere:

a) Să se afle coordonatele punctelor de intersecţie ale acestor cercuri.

b) Să se arate că pentru orice număr real k, punctul $M\left(\dfrac{10-k}{2}, k\right)$ are puteri egale faţă de cele două cercuri.

c) Se duce dreapta $y = a$.

(i) Să se afle valorile lui a pentru care această dreaptă intersectează simultan aceste două cercuri.

(ii) Să se afle valoarea lui a pentru care această dreaptă determină în cele două cercuri simultan coarde egale.

(iii) Se consideră pe cele două cercuri arcele mai mari decât $180°$ care întind coarda comună şi segmentul $[DE]$ determinat de aceste arce pe dreapta $y = a$. Să se determine valoarea lui a pentru care distanţa de la E la F este maximă.

2. Se dă funcţia $f(x) = \dfrac{x^3}{3x^2 - 4}$ şi se cere:

a) Să se studieze variaţia şi să se reprezinte grafic.

b) Să se determine punctele de pe grafic care au ordonata egală cu abscisa.

c) Să se determine punctele de pe grafic în care tangenta la curbă este paralelă cu dreapta $9x + y = 0$; să se arate că există patru astfel de puncte, care sunt vârfurile unui paralelogram.

d) Să se determine punctele de pe grafic pentru care raportul dintre ordonată şi abscisa respectivă este k; discuţie după valorile parametrului k.

3. Raportat la un sistem de axe ortogonale se dau punctele $A(-2, 0)$, $B(4, 0)$, $C(0, 3)$ şi dreapta (d) de ecuaţie $y = p$. Dreapta (d) intersectează segmentul $[AC]$ în D şi segmentul $[BC]$ în E. Se notează cu D' şi E' respectiv proiecţiile lui D şi E pe AB.

a) Să se determine p astfel ca cercul cu diametrul DE să fie tangent la AB, apoi să se afle coordonatele punctului de tangenţă.

b) Să se afle locul geometric al punctului de intersecţie a diagonalelor dreptunghiului $DD'E'E$, când p variază.

c) Să se determine valoarea lui p pentru care aria dreptunghiului $DC'E'E$ este maximă.

4. **a)** Să se determine k şi să se rezolve ecuaţia $x^3 - 3x + k = 0$, ştiind că ecuaţia are o rădăcină dublă.

b) Să se studieze variaţiile funcţiilor $f(x) = x^3 - 3x + 2$ şi $g(x) = x^2 - 3x + 2$ şi să se reprezinte grafic, raportat la acelaşi sistem ortogonal de axe.

c) Să se determine coordonatele punctelor de intersecţie ale celor două grafice şi să se scrie ecuaţia dreptei care uneşte aceste puncte.

d) Să se arate că la punctul de abscisă zero cele două curbe admit aceeaşi tangentă şi să se scrie ecuaţia acestei tangente.

SESIUNEA AUGUST

1. Se dă funcţia

$$\frac{4}{x+1} - \frac{4}{x-1} + 1.$$

a) Să se studieze variaţia şi să se reprezinte grafic.

b) Să se scrie ecuaţiile tangentelor la grafic în punctele A şi B în care graficul intersectează axa Ox.

c) Să se afle coordonatele punctului C în care se intersectează cele două tangente de la punctul b).

d) Să se afle aria triunghiului $\triangle ABC$.

2. Se dau cercurile $(\mathscr{C}_1)$ şi $(\mathscr{C}_2)$ de ecuaţii $x^2 + y^2 - 2x = 0$, respectiv $x^2 + y^2 - 8x = 0$. Prin originea axelor se duce o dreaptă variabilă (d) care mai intersectează cercul $(\mathscr{C}_1)$ în A şi cercul $(\mathscr{C}_2)$ în B.

a) Să se scrie ecuaţia cercului care are ca diametru segmentul $[AB]$ când dreapta (d) face cu axa Ox un unghi de $45°$.

b) Să se găsească ecuaţia dreptei (d) astfel ca cercul de diametru $[AB]$ să fie tangent la axa Ox.

c) Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului $[AB]$ când dreapta (d) variază.

3. Se dă funcţia $f(x) = \dfrac{ax^2}{x+1}$, unde a este un număr strict pozitiv.

a) Să se studieze variaţia funcţiei şi să se reprezinte grafic.

b) Să se determine a astfel ca graficul funcţiei să admită o asimptotă paralelă cu prima bisectoare.

c) Considerând $a = 1$, să se afle coordonatele punctelor de pe grafic în care tangentele la grafic sunt paralele cu dreapta $x + y - 3 = 0$.

4. Se dă cercul $x^2 + y^2 - 8 = 0$ şi parabola $y^2 - 2x = 0$.

a) Să se afle coordonatele punctelor în care cele două curbe se intersectează.

b) Să se scrie ecuaţiile tangentelor la cele două curbe în punctul de intersecţie din primul cadran.

c) Să se afle unghiul format de aceste două tangente.