EXAMEN DE BACALAUREAT 1969
SESIUNEA IUNIE

1. Se dă ecuaţia $x^4 - 16x^3 + ax^2 + bx + 225 = 0$. Se cere:

a) Să se rezolve ecuaţia şi să se determine valorile coeficienţilor a şi b ştiind că ecuaţia are două rădăcini raţionale duble.

b) Să se găsească punctele de intersecţie ale elipsei $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$ cu dreapta (d) de ecuaţie $x - 5y + 5 = 0$ şi să se scrie ecuaţiile tangentelor la elipsă în aceste puncte. Notând cu $\operatorname{tg} u$ coeficientul unghiular al dreptei (d), să se calculeze $\cos 4u$.

c) Să se calculeze volumul corpului generat prin rotirea elipsei de la punctul b) în jurul axei $x'x$.

2. Se dă funcţia

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + m}{x - 1}\cdot$$

Se cere:

a) Să se determine m astfel încât graficul funcţiei să fie tangent axei $x'x$.
Să se studieze variaţia funcţiei pentru $m = 4$ şi să se reprezinte graficul ei.

b) Fie A punctul de minim de la a). Să se scrie ecuaţia cercului $(\mathscr{C})$ cu centrul în A şi tangent la axa $y'y$.

c) Să se scrie ecuaţia dreptei (d) care trece prin punctul $B(2(1 - \sqrt{2}), 0)$ şi face cu axa $x'x$ un unghi $u \in (0, \pi)$, soluţie a ecuaţiei

$$2\sin^2 x + (4 - \sqrt{2})\cos x + 2(\sqrt{2} - 1) = 0.$$

Să se arate că dreapta (d) este tangentă la cercul $(\mathscr{C})$.

3. (subiect comun cu cel de la liceele economice)

a) Se dă sistemul $\begin{cases} mx + y = m + 1 \\ 2x + my = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$. Să se determine m astfel încât sistemul să fie compatibil şi să se rezolve în acest caz.

b) Să se scrie ecuaţia elipsei raportată la axa de coordonate ca axă de simetrie, ce trece prin punctele $A(3, 0)$ şi $B(0, 2)$. Să se afle punctele de intersecţie ale elipsei cu dreapta de ecuaţie $2x - y - 6 = 0$.
Să se scrie ecuaţiile tangentelor la elipsă în aceste puncte şi să se afle punctul lor de intersecţie.

c) Să se studieze variaţia funcţiei şi să se reprezinte graficul ei:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 1}\cdot$$

4. (subiect comun cu cel de la liceele economice) Se dă ecuaţia $4x^2 - 4(m - 1)x - m + 3 = 0$ şi se cere:

a) Să se discute natura şi semnele rădăcinilor ecuaţiei când $m \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine m astfel încât să avem $1 + 4x_1^3 + 4x_2^3 = m$, unde x_1 şi x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei date.

5. Să se scrie ecuaţia cercului care trece prin punctele $A(1, 3)$ şi $B(-3, 1)$ şi al cărui centru se află pe dreapta de ecuaţie $4x + y - 8 = 0$.

6. Să se rezolve ecuaţia $x^3 - 9x^2 + ax - 27 = 0$ şi să se determine valoarea coeficientului a, ştiind că ecuaţia are o rădăcină triplă.

7. Fie punctele $A(1, 2)$ şi $B(4, 6)$. Se cere să se scrie:

a) ecuaţia cercului $(\mathscr{C}_1)$ cu centrul în punctul A, tangent axei $x'x$;

b) ecuaţia cercului $(\mathscr{C}_2)$ cu centrul în punctul B, tangent exterior cercului $(\mathscr{C}_1)$.

8. Fie funcţia $f(x) = 1 - \frac{3}{x^2 - 4x + 3}\cdot$ Să se calculeze $\int f(x)\,dx$.

9. Se dă funcţia $f(x) = \frac{x^2 - 4x - 4}{x}\cdot$ Se cere:

a) Să se studieze variaţia funcţiei şi să sereprezinte graficul ei.

b) Să se calculeze $\int f(x)\ dx$.

10. Se dă ecuaţia hiperbolei $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{8} - 1 = 0$. Se cere:

a) să se precizeze elementele ei şi să se reprezinte grafic.

b) Să se găsească pe hiperbolă punctele T_1 Şi T_2 de abscisă $x = 5$, să se scrie ecuaţiile tangentelor în aceste puncte la hiperbolă şi să se calculeze coordonatele punctului M, întersecţia lor.

c) Să se calculeze aria triunghiului T_1MT_2.

SUBIECTE PENTRU LICEE ECONOMICE

1. **a)** Se dă funcţia $f(x) = 8x^3 - 12x^2 - 2x + a$. Să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$ şi să se determine valorile lui a ştiind că rădăcinile ecuaţiei sunt în progresie aritmetică.

b) Se dă funcţia

$$g(x) = \frac{1}{x^3 - 4x + 3}.$$

Se cere să se studieze variaţia funcţiei şi să se reprezinte graficul ei.

c) Să se scrie ecuaţia cercului cu centrul în punctul de maxim al graficului funcţiei de la punctul b) şi trecând prin originea axelor de coordonate.

2. Se dă funcţia

$$f(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 5}.$$

Se cere:

a) Să se studieze variaţia şi să se reprezinte graficul funcţiei.

b) Să se scrie ecuaţia tangentelor la graficul funcţiei în punctele în care curba taie axa absciselor.

3. Se dă triunghiul ABC în care se cunosc $AB = c$, $BC = a$ şi $\widehat{ABC} = \alpha$, unde $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi se cere:

a) Să se calculeze în funcţie de a, c şi α aria şi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul lui BC.

b) Pentru ce valoare a lui α volumul este egal cu $\frac{\pi a c^2}{12}$?

SESIUNEA AUGUST

I. Se dă funcţia

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{2x + m}\cdot$$

Se cere:

1. Să se determine m astfel încât funcţia să admită un extrem în punctul $x = 1$.
Să se studieze variaţia funcţiei date pentru $m = -4$ şi să se reprezinte graficul ei.

2. Să se scrie ecuaţia parabolei raportată la axa $x'x$ ca axă de simetrie, axa $y'y$ ca tangentă la vârf şi trecând prin punctul $P\left(\frac{1}{3}, 2\right)$. Să se arate că punctul Q, intersecţia dreptei FP (F fiind focarul parabolei) cu paralela dusă prin originea axelor de coordonate la normala în P la parabolă, se găseşte pe cercul $(\mathscr{C})$ de ecuaţie $x^2 + y^2 - 6x = 0$.

3. Fie O şi M punctele de intersecţie ale cercului $(\mathscr{C})$ cu bisectoarea unghiului xOy. Să se calculeze volumul corpului generat prin rotirea, în jurul axei Ox, a suprafeţei plane limitată de arcul $\overset{\frown}{OM}$ al cercului $(\mathscr{C})$, situat în primul cadran al axelor şi de segmentul de dreaptă $[OM]$.

II. Se consideră ecuaţiile elipsei şi hiperbolei raportate la axe de simetrie ca axe de coordonate

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} - 1 = 0 \tag{1}$$

şi

$$\frac{x^2}{3} - y^2 - 1 = 0. \tag{2}$$

Se cere:

1. Să se construiască în raport cu acelaşi sistem de axe de coordonate cele două curbe. Să se arate că tangentele la cele două grafice în unul din punctele lor de intersecţie sunt perpendiculare.

2. Să se găsească aria suprafeţei limitată de arcul de cerc cu diametrul egal cu axa mare a elipsei (1), situat deasupra axei $x'x$, dreptele $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $x = 3$ şi axa Ox.

3. Se consideră funcţia

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + m. \tag{3}$$

Să se determine valoarea parametrului m pentru care graficul funcţiei $f(x)$ trece prin punctul A, intersecţia elipsei (1) cu axa Ox, apoi să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$ în care m se înlocuieşte cu valoarea găsită. Să se determine valorile lui m pentru care polinomul (3) are trei rădăcini reale distincte.

III. Se dă funcţia $f(x) = x^4 - 5x^2 + m$. Se cere:

1. Să se determine m astfel încât graficul funcţiei f să taie axa $x'x$ în maximum de puncte distincte.

2. Să se reprezinte graficul funcţiei pentru $m = 4$.

3. Să se scrie ecuaţia cercului $(\mathscr{C})$ cu centrul în punctul de maxim al graficului, tangent dreptei (D) de ecuaţie $x + 2y + 2 = 0$. Tangentele la cercul precedent în punctele lui de intersecţie cu axa $x'x$ fac un unghi u; să se calculeze $\sin 3u$.

4. Fie A şi B punctele (cele mai apropiate de originea axelor) în care graficul funcţiei de la punctul 2. taie axa $x'x$, iar M punctul de maxim al graficului; să se calculeze aria delimitată de arcul de grafic $\overset{\frown}{AMB}$ şi segmentul $[AB]$.

IV. **1.** Să se scrie ecuaţia parabolei (P) raportată la axa $x'x$ ca axă de simetrie, $y'y$ ca tangentă la vârful ei şi trecând prin punctul $C(2, 4)$.

2. Fie E şi G punctele de intersecţie ale parabolei (P) cu dreapta (D) de ecuaţie $2x + y - 3 = 0$; să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin unul din aceste puncte şi face cu axa $x'x$ unghiul ascuţit v, soluţie a ecuaţiei $2\sin^2 x - \cos x = 0$.

3. Să se găsească, în primul cadran xOy al axelor de coordonate, un punct M, situat pe parabola (P) între punctele C şi E (punctul E având coordonate pozitive), astfel încât aria triunghiului ECM să fie maximă.

4. Să se calculeze volumul corpului generat prin rotirea, în jurul axei Ox, a suprafeţei plane limitată de arcul $\overset{\frown}{EC}$ al parabolei (P) şi coarda $[EC]$.

SUBIECTE PENTRU LICEE ECONOMICE

1. Se dă ecuaţia $x^3 + Kx^2 + 32 = 0$.

a) Să se determine K astfel ca ecuaţia să aibă o rădăcină dublă şi apoi să se rezolve ecuaţia.

b) Să se studieze variaţia funcţiei
$$f(x) = \frac{x^3}{x^3 + Kx^2 + 32}$$
pentru $K = -6$

c) Se consideră cercul cu centrul în originea axelor de coordonate şi cu raza 4. Să se determine punctele de intersecţie ale cercului cu asimptotele graficului de la b) şi să se scrie ecuaţiile tangentelor la cerc în aceste puncte.

2. Se dă ecuaţia $3x^3 + x^2 - 7x + \alpha = 0$.

a) Să se determine parametrul α şi să se rezolve ecuaţia, ştiind că admite o rădăcină dublă (pentru valoarea întreagă a lui α).

b) Să se reprezinte grafic funcţia $f(x) = 3x^3 + x^2 - 7x + \alpha$ pentru $\alpha = -5$.

c) Să se determine coordonatele punctelor de pe curba de la b), în care tangentele duse la curbă sunt paralele cu dreapta $(\Delta):\ 15x + 9y - 25 = 0$.

d) Să se scrie ecuaţia cercului circumscris triunghiului format de dreapta (Δ) cu axele de coordonate şi apoi ecuaţia tangentei la cerc în punctul de intersecţie al cercului cu partea pozitivă a axei Ox.

3. Se dă ecuaţia $2x^2 - (2K + 1)x + K^2 - 9K + 39 = 0$.

a) Să se determine K astfel încât una din rădăcinile ecuaţiei să fie dublul celeilalte şi apoi să se rezolve ecuaţia.

b) Să se reprezinte grafic funcţia $f(x) = 2x^2 - (2K + 1)x + K^2 - 9K + 39$ pentru $K = 7$.

c) Să se scrie ecuaţia cercului de diametru $[BC]$, unde $B(5, 0)$, $C(0, 25)$ şi să se determine tangenta trigonometrică a unghiului făcut de dreapta AC cu tangenta la cerc în B, având $A\left(\frac{5}{2}, 0\right)$.

4. **a)** Să se rezolve ecuaţia $x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$ ştiind că are o rădăcină dublă.

b) Să se studieze variaţia funcţiei
$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + x^2 - 5x + 3}.$$

c) Să se scrie ecuaţia tangentei la curba de la b) în punctul ei de intersecţie cu axa Oy.

d) Să se scrie ecuaţia cercului cu centrul $C(1, 0)$ şi care trece prin $A(0, -1)$. Să se arate că în punctul A, cercul şi curba de la b) au aceeaşi tangentă.