EXAMEN DE BACALAUREAT 1970
SESIUNEA IUNIE

1. Se dau parabolele de ecuaţii $y^2 = 4x$ şi $y^2 = 12x$. Prin originea O a axelor de coordonate se duce o dreaptă (d) care intersectează cele două parabole, respectiv, în punctele M şi N (diferite de origine). Se cere:

a) Să se arate că punctul P, mijlocul segmentului $[MN]$, se deplasează pe parabola $y^2 = 8x$, când (d) se roteşte în jurul punctului O.

b) Ce unghi trebuie să facă cu semiaxa Ox dreapta (d), astfel încât aria delimitată de conturul format de arcele de parabole ON, OM şi segmentul de dreaptă $[MN]$ să fie egală cu $\dfrac{64}{3}$?

c) Să se determine funcţia $y = P(x)$ şi să se construiască graficul ei ştiind că este satisfăcută condiţia $y'' = 12x - 38$, graficul funcţiei taie axa $x'x$ în punctele A şi B de abscise $x = \dfrac{3}{2}$ şi $x = 4$.

2. Se consideră cercul $(\mathscr{C})$ cu centrul pe semiaxa Ox, tangent axei $y'y$ şi având diametrul egal cu 4. Pe arcul $(\mathscr{C}_1)$ al cercului $(\mathscr{C})$ situat în primul cadran al axelor, se ia un punct mobil M şi punctul N, proiecţia lui M pe axa $x'x$. Se cere:

a) Să se scrie ecuaţia cercului $(\mathscr{C})$ şi să se determine poziţia punctului M astfel încât aria triunghiului OMN să fie maximă; să se calculeze maximul acestei arii şi unghiurile triunghiului OMN.

b) Să se determine poziţia lui M astfel încât volumul corpului generat de suprafaţa mărginită de arcul de cerc $(\mathscr{C}_1)$ şi coarda $[OM]$, prin rotaţia ei în jurul lui Ox, să fie egal cu 6π.

c) Se consideră sistemul format din ecuaţia cercului $(\mathscr{C})$ şi ecuaţia $x^3 + y^2 - 5x + m = 0$. Se cere să se elimine y între aceste două ecuaţii şi să se determine m astfel încât ecuaţia obţinută prin eliminare să admită o rădăcină dublă întreagă. Să se calculeze în acest caz soluţiile sistemului.

3. Se dă funcţia

$$f(x) = \frac{x^2 - 2ax + b^2}{x + b} \tag{1}$$

(a şi b sunt parametri reali). Se cere:

a) Să se determine a şi b astfel încât pentru $x = -3$ şi $x = 1$ funcţia (1) să admită puncte extreme: să se precizeze care din aceste puncte este punct de minim şi care este punct de maxim.

b) Graficul funcţiei (1) în care a şi b se înlocuiesc cu valorile găsite la punctul a). Ecuaţiile dreptelor care trec prin punctul de intersecţie al asimptotei oblice a graficului cu Ox şi fac cu această asimptotă un unghi de $30°$.

c) Să se determine parametrul real m astfel încât graficul funcţiei $g(x) = x^3 - 6x^2 + mx + 10$ să intersecteze axa $x'x$ în trei puncte ale căror abscise să fie în progresie aritmetică; să se rezolve în acest caz ecuaţia $g(x) = 0$.

4. Se consideră un dreptunghi $ABCD$ $(AB > BC)$ raportat la axele lui de simetrie ca axe de coordonate. Diagonala dreptunghiului este egală cu 4, iar aria lui este egală cu $4\sqrt{3}$.

Se consideră, de asemenea, cercul circumscris dreptunghiului şi parabola, raportată la axa Ox, ca axă de simetrie şi $y'y$ ca tangentă la vârf, care trece prin vârful C al dreptunghiului situat în primul cadran. Se cer:

a) Ecuaţiile celor două curbe.

b) Aria suprafeţei delimitată de arcul $\overset{\frown}{OC}$ al parabolei, arcul $\overset{\frown}{CE}$ al cercului (E fiind punctul de intersecţie a cercului cu semiaxa Ox) şi segmentul de dreaptă $[OE]$.

c) Să se reprezinte graficul funcţiei $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$.

SUBIECTE PENTRU LICEE AGRICOLE

1. Se dă ecuaţia $x^3 - 6x^2 - 15x + k = 0$, $k \in \mathbb{R}$. Se cere:

a) Să se discute natura rădăcinilor acestei ecuaţii când k variază.

b) Să se afle rădăcinile ecuaţiei date pentru $k = 2$.

c) Să se reprezinte grafic funcţia $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 2$.

d) Să se afle coordonatele punctelor de pe graficul funcţiei de mai sus în care tangentele la curbă sunt paralele ca axa Ox; să se scrie ecuaţiile acestor tangente.

2. Se dă ecuaţia $2\sin^2 x + 2\sin 2x - 4\cos^2 x = 1$. Se cere:

a) Să se rezolve ecuaţia.

b) Considerându-se dreapta d care trece prin punctul $M\left(-1, \frac{1}{2}\right)$, înclinată faţă de axa Ox cu un unghi egal cu $\frac{\pi}{4}$, să se scrie ecuaţia elipsei tangentă la dreapta d în punctul $N(-3, 4)$.

c) Să se afle volumul corpului obţinut prin rotaţia elipsei determinată la punctul b) în jurul axei Ox.

SUBIECT PENTRU LICEE ECONOMICE

A. Se dă funcţia
$$f(x) = \frac{mx^2 + 2}{x - 1},\ m \in \mathbb{R}.$$

Se cere:

a) Să se determine m astfel ca graficul funcţiei să fie tangent la dreapta $y = -2x + 13$.

b) Să se reprezinte grafic funcţia dată pentru $m = \frac{7}{4}\cdot$

B. Unei sfere cu raza R i se circumscrie un con cu unghiul din vârf al secţiunii axiale egal cu 2β. Se cere:

a) Să se determine raza sferei circumscrise conului.

b) Să se determine unghiul β în aşa fel, ca raportul dintre aria sferei înscrise şi aria sferei circumscrise conului să fie egal cu $\frac{1}{4}\cdot$

SUBIECTE PENTRU LICEE AGRICOLE ŞI LICEE ECONOMICE

1. Se dă funcţia

$$f(x) = x^3 - kx^2 + 11x - 6,\ k \in \mathbb{R}.$$

Se cere:

a) Să se determine k şi să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$ ştiind că rădăcinile sunt în progresie aritmetică.

b) Pentru $k = 6$ să se găsească punctele de minim şi de maxim ale funcţiei.

2. Se dă elipsa $4x^2 + 9y^2 = 36$. Se duc tangentele la elipsă în punctele $A(3, 0)$ şi $A'(-3, 0)$. O tangentă variabilă taie aceste tangente fixe în P şi Q. Se cere:

a) Să se arate că produsul lungimilor segmentelor $[AP]$ şi $[A'Q]$ este constant.

b) Să se găsească mărimea unghiului $\sphericalangle PFQ$, unde F este unul din focarele elipsei.

3. Se dă funcţia

$$f(x) = x^2 - 2(m-1)x + 1 - 2m,\ m \in \mathbb{R}.$$

Se cere:

a) Să se cerceteze pentru ce valori ale lui m ecuaţia $f(x) = 0$ are rădăcinile reale şi în ce caz rădăcinile sunt egale.

b) Să se reprezinte grafic funcţia când $m = \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{4}\cdot$

c) Să se scrie ecuaţiile tangentelor la acest grafic în punctele sale de intersecţie cu axa Ox şi în punctul său de extrem.

4. Să se calculeze derivata funcţiei

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\cdot$$

SESIUNEA AUGUST

I. Se dă funcţia

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + m}{x^2}\cdot$$

Se cere:

1. Să se determine m astfel încât funcţia f să admită în punctul $x = 2$ un extrem.

2. Pentru $m = 4$ să se studieze variaţia funcţiei f şi să se construiască graficul ei; apoi să se scrie ecuaţia cercului care trece prin punctele de pe grafic de abscise $x_1 = 1$ şi $x_2 = 2$ şi al cărui centru se găseşte pe asimptota oblică a graficului.

3. Să se calculeze aria suprafeţei delimitată de graficul funcţiei $g(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$, de axa $x'x$ şi de dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = \frac{\pi}{4}\cdot$ Să se rezolve ecuaţia $g(x) = 0$.

II. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = 2x^3 + x^2 - 4x + m$.

1. Să se determine mulţimea valorilor lui m pentru care graficul funcţiei f intersectează axa $x'x$ în trei puncte distincte.

2. Să se construiască graficul funcţiei f pentru $m = -3$; să se determine pe acest grafic punctele în care tangentele la grafic sunt paralele cu dreapta (d) de ecuaţie $4x + y = 0$.

3. Să se rezolve ecuaţia

$$\int_0^x (3t^2 + t - 2)\, dt = \frac{13}{2}\cdot$$

III. Se dau ecuaţiile a două curbe

$$x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0 \tag{2}$$

şi

$$y^2 = x \tag{3}$$

Se cere:

1. Să se precizeze natura celor două curbe şi să se construiască graficele lor în raport cu acelaşi sistem rectangular de axe de coordonate; să se calculeze coordonatele punctelor lor de intersecţie.

2. Să se calculeze volumul corpului generat prin rotaţia, în jurul semiaxei Ox, a suprafeţei OAB, situată în unghiul xOy şi delimitată de segmentul $[OA]$, arcul $\widehat{AB}$ de curbă (2) şi arcul $\widehat{OB}$ de curbă (3). Punctul A este punctul de intersecţie, cel mai apropiat de origine, a curbei (2) cu axa Ox, iar B este punctul de intersecţie, cel mai apropiat de axa $y'y$, a curbelor (2) şi (3).

3. Să se discute, în raport cu parametrul real p, numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $2x^3 - 19x^2 + 56x + p = 0$. Să se rezolve această ecuaţie pentru $p = -48$.

IV. **1.** Să se scrie ecuaţia parabolei raportată la axa $x'x$ ca axă de simetrie, axa $y'y$ ca tangentă la vârf şi cu focarul în punctul $F(3, 0)$; pe această parabolă se consideră punctul mobil P. Să se arate că punctul de intersecţie N a perpendicularei dusă O pe tangenta în P la parabolă cu dreapta FP, se deplasează pe cercul $x^2 + y^2 - 6x = 0$.

2. Cercul $x^2 + y^2 - 6x = 0$se intersectează respectiv cu axa Ox şi bisectoarea unghiului xOy în punctele R şi S (diferite de originea axelor). Să se calculeze volumul corpului generat prin rotirea, în jurul axei Ox, a conturului format de segmentul $[SO]$ şi arcul de cerc $\widehat{SR}$.

3. Să se determine parametrul real m astfel încât ecuaţia $x^3 - 2x^2 + x + m + 8 = 0$ să admită o rădăcină dublă întreagă; să se rezolve în acest caz ecuaţia.

SUBIECTE PENTRU LICEE AGRICOLE ŞI LICEE ECONOMICE

1. Se consideră cercul $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$. Se cere:

a) Să se verifice că dreapta $2x - y - 10 = 0$ este tangentă cercului şi să se afle coordonatele punctului A de contact.

b) Prin A se duce o paralelă la bisectoarea primului cadran. Să se afle coordonatele punctului B unde această dreaptă taie cercul.

c) D fiind punctul de intersecţie a tangentelor duse la cerc, în punctele în care axa Ox taie cercul, să se scrie ecuaţia coardei comune dintre cercul dat şi cercul de diametru $[OD]$ (O este originea axelor de coordonate).

2. Să se determine a şi b, apoi să se rezolve ecuaţia $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + ax + b = 0$, ştiind că admite rădăcina $x = 1 - i$.

3. Se dă un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile x_1, x_2 şi x_3. Suma celor trei dimensiuni este egală cu 6, aria totală este egală cu $2d$, iar volumul paralelipipedului este egal cu 4. Se cere:

a) Ecuaţia care are ca rădăcini pe x_1, x_2 şi x_3.

b) Să se determine d astfel ca ecuaţia de la punctul a) să aibă rădăcină dublă şi să se afle dimensiunile paralelipipedului în acest caz.

3. **a)** Să se reprezinte grafic funcţia $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$.

b) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul de mai sus în punctul de abscisă $x = 2$ şi să se arate pe figură această tangentă.

4. Se dau punctele $A(0, 3)$, $B(2, 5)$ şi dreapta $(D): 2x + 3y - 5 = 0$. Se cere:

a) Să se scrie ecuaţia cercului care trece prin punctele A şi B şi are centrul pe dreapta (D).

b) Ecuaţia tangentei în B la cerc.

c) Aria triunghiului care are ca vârfuri originea, punctul A şi centrul cercului.

5. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{(x+1)^3+1} - \sqrt[3]{x^3+2x^2+1})$.

6. Să se construiască graficele funcţiilor:

$$(H)\, y = -\frac{8}{x} \quad \text{şi} \quad (P)\, y = x^2.$$

a) Dacă aceste curbe au puncte comune, să se scrie coordonatele acestor puncte comune.

b) Prin punctul $A(-2, 4)$ se duce o dreaptă D paralelă cu prima bisectoare. Ea taie curba (P) într-un punct B (diferit de A) şi curba (H) într-un punct C (diferit de A). Să se calculeze coorodonatele punctelor A şi B.

c) Dacă prin A se mai duce o dreaptă (D') oarecare, ea mai taie curbele (P) şi (H) în punctele B', respectiv C'. Să se calculeze panta acestei drepte (D') în aşa fel încât A să fie mijlocul segmentului $[B'C']$.

7. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} (3x+2)^2 - 4(2x-1)(x+3) > 0 \\ \dfrac{x+3}{2x-1} < 0 \\ \dfrac{3x+2}{2x-1} > 0 \end{cases}$.