EXAMEN DE BACALAUREAT 1971
SESIUNEA IUNIE

1. Se consideră funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{p}{x} - \dfrac{\ln x}{x}\cdot$

a) Să se calculeze, în funcţie de p, valoarea x_p a lui x care anulează derivata funcţiei f, şi valoarea corespunzătoare a funcţiei f, $y_p = f(x_p)$.

b) La fiecare valoare a lui p corespunde un punct $M(x_p, y_p)$. Să se afle locul geometric al punctelor M_p şi să se construiască graficul respectiv.

c) Să se calculeze $S(p) = \sum\limits_{k=0}^{p} y_p$, suma ordonatelor punctelor M_0, M_1,..., M_p şi $\lim\limits_{p\to\infty} S(p)$.

d) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x = 1$ şi să se arate că această tangentă trece printr-un punct fix, când p variază.

e) Să se calculeze, în funcţie de m, aria suprafeţei delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox, dreptele $x = 1$, $x = m$, unde $m > 1$. Să se determine m astfel ca aria obţinută să fie egală cu $p \ln m - \dfrac{1}{2}\cdot$

2. În raport cu un sistem rectangular de axe de coordonate $x'Ox$ şi $y'Oy$, se consideră hiperbola echilateră de ecuaţie

$$x^2 - y^2 - 9 = 0. \tag{1}$$

a) Să se determine coordonatele x_1 şi y_1 ale punctului M situat pe hiperbola (1), în unghiul xOy, astfel încât aria triunghiului MNP (N fiind proiecţia punctului M pe axa $x'x$, iar P intersecţia cu axa $x'x$ a perpendicularei în punctul M pe tangenta în acest punct la hiperbolă) să fie egală cu 10.

b) O dreaptă mobilă paralelă cu $y'y$ taie hiperbola (1) în punctele R şi S. Să se afle şi să se construiască locul geometric descris de punctul I, intersecţia dreptelor $A'R$ şi AS (A şi A' sunt vârfurile hiperbolei situate pe $x'x$).

c) Să se calculeze volumul generat prin rotirea, în jurul semiaxei Ox, a domeniului limitat de arcul de hiperbolă (1), semiaxa Ox şi dreptele de ecuaţie $x = 3$ şi $x = m$ ($m > 3$). Pentru ce valoare a lui m acest volum este egal cu volumul sferei de rază 3?

3. Se consideră funcţia $f(x) = (m^3 - m^2 - m - 2)x^3 - mx + 2$, unde m este un parametru real.

a) Să se arate că există o valoare a lui m pentru care $f(x) = y$ reprezintă o dreaptă; să se construiască în raport cu un sistem rectangular de axe pe această dreaptă.

b) Să se arate că pentru $0 < m < 2$ funcţia f nu admite extreme.

c) Pentru $m = 0$ şi $m = -1$ să se studieze variaţiile funcţiilor şi să se construiască graficele respective; să se afle coordonatele punctelor de intersecţie ale celor două grafice şi să se arate că aceste puncte sunt coliniare.

d) Să se calculeze aria delimitată de graficele celor două funcţii de la punctul c) şi de dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = 1$.

4. Se consideră hiperbola

$$(H)\, x^2 - y^2 = 4$$

şi dreapta

$$(D)\, y = x - t,$$

unde t este un parametru real, raportate la un sistem de axe perpendiculare.

a) Să se arate că fiecărei valori $t \in \mathbb{R}^*$ îi corespunde un singur punct de intersecţie M al dreptei (D) cu hiperbola (H) ale cărui coordonate sunt funcţii de t.

b) Punctului M îi facem să-i corespundă punctul M' ale cărui coordonate se obţin din cele ale lui M prin înlocuirea lui t cu $-\dfrac{2}{t}\cdot$

(i) Să se determine locul geometric al mijloacelor segmentelor $[MM']$ când t variază.

(ii) Să se arate că panta dreptei MM' este independentă de t.

c) Submulţimea $(\mathscr{C})$ a lui (H) formată din punctele cu ordonata pozitivă este graficul unei funcţii f. Să se determine constanta K astfel ca funcţia F definită prin egalitatea $F(x) = \dfrac{x}{2} f(x) + K \ln(x + f(x))$ să fie o primitivă a funcţiei f.

d) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotirea în jurul axei Ox a domeniului plan limitat de graficul funcţiei f şi de dreptele $x = 2$, $x = 3$ şi $y = x$.

SUBIECTE PENTRU LICEE ECONOMICE

1. Se consideră funcţia $f(x) = x - 1 - \sqrt{m - x^2}$, în care m este un parametru real pozitiv.

a) Să se arate că dacă $m \geq \frac{1}{2}$, atunci graficul funcţiei intersectează axa Ox într-un singur punct şi să se determine acest punct.

b) Să se determine parametrul m astfel ca tangenta la graficul funcţiei în punctul de abscisă $x = 1$ să fie paralelă cu dreapta $y = 2x + 3$.

c) Pentru $m = 1$ să se studieze variaţia şi să se reprezinte graficul funcţiei f; apoi să se calculeze aria suprafeţei limitată de graficul funcţiei, axa Ox şi dreptele $x = 0$ şi $x = 1$.

d) Pentru $m = 1$ să se determine $t \in [0, 2\pi]$ astfel încât $f(\cos t) = 0$.

2. Fie funcţia $f(x) = \dfrac{x - a - b + 1}{x^2 + a^2 + b^2}$, unde a, $b \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că oricare ar fi a şi b, funcţia admite un punct de maxim şi un punct de minim.

b) A şi B fiind punctele de extrem ale funcţiei, C şi D respectiv proiecţiile lor pe axa Ox, iar M punctul de intersecţie a graficului funcţiei cu axa Ox, să se arate că $MC^2 = MD^2$.

c) Pentru $a = 0$ şi $b = 1$ să se studieze variaţia şi să se reprezinte graficul funcţiei f; apoi să se calculeze aria domeniului limitat de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele $x = 0$ şi $x = 1$.

3. Fie ecuaţia $y^3 - 3xy^2 + (3x^2 - 1)y + x - x^3 = 0$, în care x este un parametru real.

a) Să se rezolve ecuaţia şi să se arate că rădăcinile ei, y_1, y_2, y_3, sunt în progresie aritmetică.

b) Să se verifice că dacă $x \neq -1$ şi $x \neq 1$, atunci

$$\frac{y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 - 3x}{5 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2} = \frac{x^3 + x}{1 - x^2}.$$

c) Notând $f(x) = \dfrac{x^3 + x}{1 - x^2}$, să se determine numerele reale a, b şi c încât $f(x) = ax + \dfrac{b}{1 - x} + \dfrac{c}{1 + x}$.

d) Să se studieze variaţia şi să se reprezinte grafic funcţia f.

4. **a)** Să se determine valorile parametrului real m astfel încât sistemul $\begin{cases} x + (m-2)y = 3m \\ (m-2)x + 4y = 6 \end{cases}$ să admită o soluţie unică, (x, y), care să satisfacă condiţiile $x > 1$ şi $y \geq 6$.

b) Pentru $m = 1 + \sqrt{3}$, $m = 1$ şi $m = 1 - \sqrt{3}$, soluţiile x şi y ale sistemului de la punctul a) reprezintă, respectiv, coordonatele punctelor A, B şi A' din plan. Prin originea O a sistemului cartezian de axe ortogonale se duce o dreaptă variabilă ce întâlneşte dreapta $A'B$ în punctul C'. Să se arate că al doilea punct M de intersecţie a cercurilor circumscrise triunghiurilor OAC şi $OA'C'$ aparţine cercului circumscris triunghiului ABA'.

5. Să se studieze variaţia şi să se reprezinte grafic funcţia $f(x) = \cos 2x - \sqrt{1 - \sin^2 x}(\cos x + \sin x)$ pentru $x \in [0, \pi]$.

SESIUNEA AUGUST

1. Se consideră funcţia

$$f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x+m},$$

unde m este un parametru real.

a) Să se arate că există valori ale lui m, pentru care graficul funcţiei f este o dreaptă şi să se afle aceste valori.

b) Mulţimea valorilor lui m pentru care funcţia f admite extreme (discuţie).

c) Pentru $m \neq -1$ şi $m \neq -3$, să se arate că graficul funcţiei f şi cercul $(\mathscr{C})$ de ecuaţie $x^2+y^2-4x+3=0$ au două puncte comune fixe A şi B; să se calculeze coordonatele acestor puncte.

d) Să se construiască graficul funcţiei $f(x)=x-4+\dfrac{3}{x}$ şi să se calculeze aria delimitată de acest grafic, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=3$ şi $x=p$ $(p>3)$; să se determine p astfel încât această arie să fie egală cu $3\ln\dfrac{p}{3}$.

2. Se consideră funcţia

$$f(x)=\frac{m(x+1)^3}{x^2-mx+1},$$

unde m este un parametru real.

a) Pentru ce valori ale lui m graficul funcţiei f admite asimptote paralele cu axa $y'y$? Să se calculeze $f'(x)$. Pentru ce valori ale lui m funcţia este monotonă?

b) Pentru $m=1$, să se studieze variaţia funcţiei f şi să se construiască graficul ei $(\mathscr{C}_1)$.

c) Fie A şi B punctele în care $(\mathscr{C}_1)$ intersectează, respectiv, axele de coordonate. În ce puncte curba $(\mathscr{C}_1)$ admite o tangentă paralelă cu AB?

d) Să se formeze ecuaţia care dă abscisele punctelor de intersecţii ale graficului $(\mathscr{C}_1)$ de la punctul b) cu dreapta (d) de ecuaţie $y=px+1$. Să se discute, după valorile lui p, numărul punctelor de intersecţie ale curbei $(\mathscr{C}_1)$ cu dreapta (d); să se precizeze punctele în care (d) este tangentă la $(\mathscr{C}_1)$.

3. Se dau punctele $A(3,0)$, $B(0,\sqrt{5})$ şi $C(5,4)$.

a) Să se scrie ecuaţiile elipsei şi a hiperbolei raportate la sistemul de axe rectangulare $x'Ox$ şi $y'Oy$ ca axe de simetrie şi trecând prin punctele A şi B (elipsa), A şi C (hiperbola); să se figureze cele două curbe în raport cu acelaşi sistem de axe.

b) Prin punctul A se duce o dreaptă mobilă care taie hiperbola în punctul M (diferit de A); să se afle locul geometric al mijlocului segmentului $[AM]$. Să se pună ecuaţia locului geometric sub forma $y^2=f(x)$ şi să se reprezinte grafic variaţia funcţiei f.

c) Să se determine pe elipsa de la punctul a) un punct $N(x_1,y_1)$, situat în unghiul xOy, astfel încât volumul corpului generat prin rotirea în jurul axei $x'x$, a domeniului limitat de arcul de elipsă $\overparen{AN}$ şi coarda $[AN]$ să fie egal cu $\dfrac{5\pi}{9}$.

4. **a)** Să se scrie ecuaţia parabolei raportată la axa $x'x$ ca axă de simetrie, axa $y'y$ ca tangentă la vârf şi care trece prin punctul $C(1,3)$; să se construiască această parabolă (P).

b) Fie E şi G punctele de intersecţie ale parabolei (P) cu dreapta (D) de ecuaţie $6x-5y-6=0$; să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin unul din aceste puncte şi face cu axa $x'x$ unghiul ascuţit V, soluţie a ecuaţiei $2\cos^2 x+3\sqrt{2}\sin x-4=0$.

c) Să se calculeze volumul corpului generat prin rotirea, în jurul axei Ox, a domeniului limitat de arcul $\overparen{EG}$ al parabolei (P) şi coarda $[EG]$.

d) O dreaptă variabilă paralelă cu axa $y'y$ taie parabola (P) în punctele M şi N. Să se afle şi să se construiască locul geometric descris de punctul I de intersecţie a tangentei în punctul M la parabolă cu dreapta ON.

SUBIECTE PENTRU LICEE ECONOMICE

1. Se consideră funcţia $f(x) = \dfrac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$, precum şi ecuaţia $f(x) = f(m)$, în care x este necunoscuta şi m este un parametru real.

- **a)** Să se arate că rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale ecuaţiei $f(x) = f(m)$ sunt $x_1 = m$, $x_2 = g(m)$ şi $x_3 = h(m)$, în care g şi h sunt funcţii de m, de forma $\dfrac{am + b}{cm + d}$, a, b, c, d fiind numere care se cer a fi determinate.
- **b)** Să se arate că suma rădăcinilor, suma inverselor rădăcinilor şi produsul rădăcinilor se pot exprima în funcţie de $f(m)$.
- **c)** Ce devin x_1, x_2 şi x_3 dacă se înlocuieşte m cu $g(m)$. Dar dacă se înlocuieşte m cu $h(m)$?
- **d)** Să se determine coeficienţii p, q, r astfel încât
$$f(x) = px + \frac{q}{1 - x\sqrt{3}} + \frac{r}{1 + x\sqrt{3}}.$$
- **e)** Să se studieze variaţia şi să se reprezinte graficul funcţiei f.

2. Fie funcţia $h(x) = e^{-x} + a(x + 2)$, în care a este un parametru real.

- **a)** Să se arate că dreapta $y = ax + 2a$ este asimptotă la ramura spre $+\infty$ a graficului funcţiei h.
- **b)** Să se determine valorile lui a pentru care graficul funcţiei h admite un punct de minim şi să se arate că coordonatele x şi y ale acestui punct verifică relaţia $x + 3 = ye^x$.
- **c)** Să se studieze variaţia şi să se reprezinte graficul funcţiei $f(x) = (x + 3)e^{-x}$.
- **d)** Să se calculeze aria domeniului limitat de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele $x = -2$ şi $x = -1$.
- **e)** Să se determine x astfel încât $f(x) + f(-x) + f'(x) + f'(-x) = 2$ în care f' este derivata funcţiei f.

3. Se consideră funcţia
$$f(x) = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}}{2} + \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}}{2}.$$

- **a)** Să se stabilească domeniul său de definiţie.
- **b)** Să se arate că $f(x) = \sqrt{1 + |x|}$.
- **c)** Să se studieze derivabilitatea funcţiei f.
- **d)** Să se studieze variaţia şi să se reprezinte graficul funcţiei f.
- **e)** Să se stabilească ecuaţia cercului care trece prin punctele $A(0, f(0))$, $B(1, f(1))$ şi $C(-1, f(-1))$ şi apoi să se determine pentru ce valori ale lui m, dreapta $y = mx$ este tangentă la cerc.

4. Într-un sistem de axe ortogonale se consideră triunghiul ABC, în care $A(-2a, 0)$, $B(a, 0)$, $C(0, 4a)$, a fiind un numărreal pozitiv. Se notează respectiv cu H, G, P punctul de intersecţie a înălţimilor, centrul de greutate, respectiv centrul cercului circumscris triunghiului.

- **a)** Să se determine coordonatele punctelor H, G şi P.
- **b)** Să se arate că punctele H, G şi P sunt coliniare şi că $GH^2 = 4 \cdot GP^2$.
- **c)** Să se calculeze perimetrul triunghiului obţinut unind mijloacele laturilor triunghiului ABC.
- **d)** Să se determine simetricul punctului A faţă de dreapta care trece prin punctele B şi C.

5. Să se studieze variaţia şi să se reprezinte graficul funcţiei $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.