EXAMEN DE BACALAUREAT 1972
SESIUNEA IUNIE

1. Se dă funcţia $f : E \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{1+mx}$, unde E este domeniul maxim de definiţie, iar m un parametru real.

a) Să se discute, după valorile parametrului m, numărul punctelor de intersecţie ale graficului funcţiei date cu o dreaptă care trece prin punctele de coordonate $(0, -2)$ şi este paralelă cu prima bisectoare a axelor (nu se cere construcţia graficului în acest caz).

b) Să se determine parametrul m astfel încât funcţia să aibă un extrem pe axa Oy.

c) Să se reprezinte grafic funcţia f pentru $m = -2$.

d) Graficul funcţiei f, pentru $m = -2$, se intersectează cu o dreaptă variabilă, paralelă cu axa Ox în M şi M'. Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului $[MM']$ şi să se construiască acest loc geometric.

e) Să se afle aria suprafeţei mărginită de graficul funcţiei f corespunzător lui $m = -2$, asimptota sa oblică, axa Oy şi dreapta de ecuaţie $x = a$ $\left(0 < a < \dfrac{1}{2}\right)$; să se determine a astfel încât aria să fie egală cu $\ln 2$.

2. Se dă o sferă de rază R cu centrul O. Fie un con circular drept cu vârful S, circumscris sferei. Generatoarele acestui con sunt tangente sferei în punctele situate pe un cerc de diametru $[AB]$. Se consideră, de asemenea, conul cu vârful în O şi având ca bază acelaşi cerc mic al sferei, de diametru $[AB]$.

a) Să se afle unghiul u, jumătatea unghiului de la vârful S din secţiunea axială a conului circumscris sferei, ştiind că suma volumelor conurilor SAB şi OAB este egală cu $\dfrac{3}{8}$ din volumul sferei.

b) Fiind dată raza R a sferei, să se arate că volumul conului circumscris sferei este egal cu $\dfrac{\pi R^3(1+\sin u)^3}{3\sin u(1-\sin u)}$.

c) Să se arate că minimul volumului circumscris sferei, păstrând R constant, este egal cu de două ori volumul sferei.

d) Să se calculeze unghiul U, cel mai mare dintre unghiurile u cuprinse în intervalul $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, pentru care volumul conului circumscris sferei date este egal cu $3\pi R^3$.

3. Se dă ecuaţia $2x^4 - 9x^3 + 16x^2 - 14x + 4 = 0$.

a) Să se rezolve ecuaţia dată.

b) Să se reprezinte grafic funcţia $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x}$.

c) Să se afle m pentru care dreapta $y = mx$ taie graficul lui f în două puncte M_1 şi M_2.

d) Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului $[M_1M_2]$.

e) Să se afle aria cuprinsă între graficul funcţiei şi dreptele $x = 2$ şi $x = a$. Pentru ce a, aria este egală cu $\ln\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$?

SUBIECTE PENTRU LICEE ECONOMICE

1. În raport cu un sistem de axe ortogonale $x'Ox$ şi $y'Oy$ se consideră elipsa de ecuaţie $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ şi punctele $A(2,0)$ şi $A'(-2,0)$. Tangenta într-un punct M oarecare al elipsei intersectează tangentele în A şi A' în punctele P şi respectiv P'. Din P' se duce o perpendiculară $P'C$ pe dreapta PO.

a) Să se arate că punctul C descrie un cerc.

b) Să se arate că punctul D, intersecţia dreptelor AP' şi $A'P$ descrie o elipsă.

c) Să se verifice că punctele M, G şi H sunt coliniare, G şi H fiind punctele de intersecţie ale dreptelor care unesc punctele P şi P' cu focarele F şi F' ale elipsei.

d) Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctul $L\left(1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ şi face cu axa Ox un unghi $u \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, soluţie a ecuaţiei

$$2\sin^2 u + \sqrt{2}(\cos u - \sin u) = 1.$$

2. Se consideră funcţia

$$F(x) = \frac{x^2 + px + p}{1+p},$$

în care p este un parametru real variabil diferit de -1.

a) Să se arate că locul geometric al punctelor de extrem ale funcţiei F este $y = \dfrac{x^2+4x}{2x-1}$.

b) Să se determine punctul M situat pe graficul funcţiei $f(x) = \dfrac{x^2+4x}{2x-1}$ astfel încât triunghiul OMA să fie dreptunghic în M, unde $O(0,0)$ şi $A(1,5)$.

c) Să se discute numărul punctelor de intersecţie ale graficului funcţiei f cu dreapta $y = mx - m + 1$, m fiind un parametru real variabil.

d) Să se reprezinte grafic funcţia $g(x) = f(x) + 4x$.

3. Se consideră polinomul de o variabilă reală

$$P_a(X) = X^4 - 2(\cos a + \sin a)X^3 + 2(1+\sin 2a)X^2 - 2(\cos a + \sin a)X + 1,$$

în care a este un parametru real.

a) Să se rezolve ecuaţia $P_a(x) = 0$, ştiind că admite rădăcina $x_1 = \cos a + i \sin a$.

b) Să se formeze ecuaţia de gradul patru care admite ca rădăcini inversele rădăcinilor ecuaţiei $P_a(x) = 0$.

c) Să se detemine a astfel încât $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = -2$, în care x_1, x_2, x_3, x_4 sunt rădăcinile ecuaţiei $P_a(x) = 0$.

d) Pentru $a = 0$ se notează $f(x) = P_0(x)$. Să se reprezinte grafic funcţia f şi să se calculeze aria domeniului limitat de dreptele $x = 0$, $y = 0$, $x = \dfrac{1}{2}$ şi graficul funcţiei f.

SESIUNEA AUGUST

1. Fie ecuaţia $x^2 + x - a = 0$, cu rădăcinile x_1 şi x_2, unde a este un număr real dat şi fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$.

- **a)** Să se exprime în funcţie de a valorile y_1 şi y_2 pe care le ia f pentru x_1 şi x_2.
- **b)** Să se formeze ecuaţia de gradul al doilea ale cărei rădăcini sunt y_1 şi y_2.
- **c)** Să se arate că, pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$.
- **d)** Să se calculeze $\dfrac{f(x+1) - f(x-1)}{f(x+1) + f(x-1)}$.
- **e)** Să se determine valorile parametrului real t pentru care dreapta care trece prin punctul $A(0,1)$ şi are coeficientul unghiular t, intersectează graficul funcţiei f în două puncte distincte, altele decât A.
- **f)** Să se studieze variaţia şi să se reprezinte graficul funcţiei f.

2. Se consideră funcţia $f : E \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x+m}{1-mx}$, în care $E \subset \mathbb{R}$ este domeniul maxim de definiţie, iar m este un parametru real.

- **a)** Să se arate că, pentru orice $x \notin \left\{-m, \dfrac{1}{m}\right\}$, $f\left(-\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{1}{f(x)}$.
- **b)** Punând $m = \text{tg } a$, să se verifice că $f(f(x)) = \dfrac{x + \text{tg } 2a}{1 - x\text{tg } 2a}$.
- **c)** Notând $g(x) = \dfrac{x + \text{tg } 2a}{1 - x\text{tg } 2a}$, să se verifice egalitatea

$$g(\text{tg } 5a) - g(\text{tg } a) - g(\text{tg } 2a) = g(\text{tg } 5a) \cdot g(\text{tg } a) \cdot g(\text{tg } 2a).$$

- **d)** Să se rezolve ecuaţia $\text{tg}3a - 2\text{tg } 4a + \text{tg } 5a = 0$.
- **e)** Pentru $a = \dfrac{5\pi}{8}$, să se studieze variaţia şi să se reprezinte graficul funcţiei g şi să se determine punctele de intersecţie ale graficului funcţiei g cu bisectoarea a doua.

3. Un segment de dreaptă $[AB]$ de lungime constantă $2l$, alunecă sprijinindu-se cu capetele pe două drepte perpendiculare xx' şi yy' (A situat pe xx', iar B situat pe yy').

- **a)** Să se scrie ecuaţia cercului de diametru $[AB]$ corespunzător unghiului $OAB = \varphi$ (O este intersecţia dreptelor xx' şi yy').
- **b)** Să se afle locul geometric al intersecţiei dreptelor perpendiculare pe xx' şi yy' în punctele A, respectiv B.
- **c)** Să se demonstreze că cercul de diametru $[AB]$ şi cercul cu centrul în origine şi rază $2l$ sunt tangente în tot timpul alunecării segmentului $[AB]$. Să se scrie ecuaţia tangentei comune.

4. Se dă funcţia $f : E \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{a}{\cos x}$, a fiind un parametru real pozitiv şi $E = [0, \pi] \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

- **a)** Să se determine parametrul a astfel încât tangenta la graficul funcţiei în punctul unde graficul întâlneşte dreapta $x = \dfrac{\pi}{3}$ să facă un unghi de $30°$ cu axa Oy.
- **b)** Pentru $a = \dfrac{1}{2}$ să se reprezinte grafic funcţia f.
- **c)** Să se afle volumul corpului generat prin rotirea în jurul axei Ox a suprafeţei mărginită de dreapta $y = \dfrac{1}{4}$, graficul funcţiei f corespunzător lui $a = \dfrac{1}{2}$ şi dreptele $x = 0$ şi $x = \dfrac{\pi}{4}$.

5. Se dă funcţia $f : E \to \mathbb{R}$, $f(x) = a\sqrt{25 - x^2}$, unde E este domeniul maxim de definiţie, iar a este un parametru real.

- **a)** Să se determine parametrul real a astfel încât valoarea maximă a funcţiei să fie egală cu 3.
- **b)** Pentru $a = \dfrac{3}{5}$ să se reprezinte grafic funcţia f.

c) Să se calculeze aria mărginită de graficul funcţiei f, corespunzător lui $a = \frac{3}{5}$, axa Ox şi dreptele $x = 0$ şi $x = 5$.

6. **a)** Să se afle locul geometric al punctelor M din plan, care au proprietatea că raportul distanţelor de la M la dreapta $x = \frac{25}{4}$ şi la punctul $(4, 0)$ este egal cu $\frac{5}{4}\cdot$ Să se figureze locul geometric obţinut.

b) Să se scrie ecuaţiile tangentelor la locul geometric obţinut, înclinate cu unghiul ascuţit φ faţă de Ox, ştiind că $\cos\varphi = \frac{4}{5}$ (unghiul φ este unghiul dintre semiaxa Ox şi tangentă, în sens trigonometric).