EXAMEN DE BACALAUREAT 1973
SESIUNEA IUNIE

1. Un con circular drept este circumscris unei sfere de rază R. Se notează cu x raza bazei conului.

a) Să se exprime în funcţie de x, cu ajutorul lui R, aria laterală şi aria totală a conului.

b) Să se arate că volumul conului se poate exprima sub forma $V = \dfrac{2\pi R x^4}{3(x^2 - R^2)}$; să se studieze variaţia funcţiei $V : E \to \mathbb{R}$, $V(x) = \dfrac{2\pi R x^4}{3(x^2 - R^2)}$, unde E este domeniul maxim de definiţie.

c) Se intersectează conul cu un plan tangent la sferă, paralel cu baza. Se notează cu y raza cercului de secţiune. Să se afle relaţia care există între x, y şi R.

d) Să se determine x şi y şi să se afle volumul trunchiului de con obţinut la punctul precedent, în cazul când generatoarea face cu baza un unghi ascuţit 2α. Pentru ce valori ale lui α înălţimea trunchiului de con este egală cu media aritmetică a razelor bazelor?

2. Se dă funcţia $f : E \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + px - 3}{P(x)}$, unde E este domeniul maxim de definiţie, $p \in \mathbb{R}$, iar $P(X)$ un polinom de gradul doi.

a) Să se afle polinomul $P(X)$ astfel încât dreptele $x = 1$ şi $x = -2$ să fie asimptote la graficul funcţiei f.

b) În cazul particular al funcţiei $f : E \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + px - 3}{x^2 + x - 2}$, să se studieze variaţia funcţiei şi să se reprezinte grafic, cunoscând că punctul $x_0 = -1$ este un punct de extrem local.

c) Pentru $p = \dfrac{2}{3}$, să se calculeze aria mărginită de graficul funcţiei de la punctul b), axa Ox şi dreptele $x = 0$ şi $x = \dfrac{1}{2}$.

d) Dacă graficul funcţiei $f : E \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + px - 3}{x^2 + x - 2}$, pentru p arbitrar în $\mathbb{R}$, taie dreapta $y = 2$ într-un punct de abscisă 2, să se calculeze coordonatele tuturor punctelor de intersecţie ale graficului funcţiei cu dreapta $11x + 4y = 0$.

SUBIECTE PENTRU LICEE ECONOMICE

1. Se notează cu x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuaţiei $x^3 - px + q = 0$.

a) Pentru $q = 4$, să se determine p astfel încât $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{2}{x_3}$, determinându-se şi rădăcinile.

b) Pentru $p = 3$, să se determine q şi să se rezolve ecuaţia ştiind că ea admite o rădăcină dublă.

c) Pentru $p = 4$, să se rezolve ecuaţia în cazul în care rădăcinile sunt în progresie aritmetică.

d) În raport cu sistemul de axe ortogonale xOy, cercul de diametru $[AB]$, unde $A(-1-\sqrt{3}, 0)$, $B(-1+\sqrt{3}, 0)$, intersectează axa Oy în punctele M_1 şi M_2; tangentele la cerc în punctele M_1 şi M_2 se intersectează în M.

(i) Să se determine coordonatele lui M.

(ii) Să se calculeze lungimile laturilor şi măsurile unghiurilor triunghiului M_1M_2M.

(iii) Să se calculeze aria triunghiului M_1M_2M.

2. Fie A şi B extremităţile unui sfert de cerc $(\mathscr{C})$ de rază unitate, cu centrul O şi fie D punctul de intersecţie a tangentelor la cercul $(\mathscr{C})$ duse în A şi B. Tangenta în punctul variabil M de pe cercul $(\mathscr{C})$ intersectează pe AD în E şi pe BD în F. Se notează $AE = x$ şi $BF = y$.

a) Să se arate că $xy + x + y = 1$.

b) Să se calculeze, în funcţie de x:

(i) aria triunghiului OEF;

(ii) aria triunghiului EDF;

(iii) raza cercului înscris în triunghiul EDF.

c) Să se studieze variaţia şi să se reprezinte graficul funcţiei $f : \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x}\cdot$

d) Să se calculeze coordonatele punctelor de extrem ale funcţiei $F(x) = \frac{x-x^2}{1+x}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

SESIUNEA AUGUST

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{a^2+1}{1+x^2}-1$, $x\in\mathbb{R}$, unde a este un parametru real pozitiv. Se notează cu A şi B, respectiv C punctele de intersecţie ale graficului funcţiei cu axele Ox, respectiv Oy ale sistemului de axe rectangular cartezian xOy.

a) Să se calculeze în funcţie de parametrul a, unghiul format de tangentele duse la graficul funcţiei în punctele A şi B. Pentru ce valori ale parametrului a, tangentele sunt perpendiculare?

b) Să se calculeze lungimile laturilor şi raza cercului circumscris triunghiului AOC (O fiind originea sistemului de axe).

c) Pentru $a=1$, să se studieze variaţia funcţiei şi să se reprezinte grafic.

d) Pentru $a=1$, să se determine aria suprafeţei limitată de graficul funcţiei, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ şi $x=1$.

e) Să se arate că

$$\begin{vmatrix} \dfrac{2}{1+x^2}+2 & \dfrac{2}{1+x^2}+5 & \dfrac{2}{1+x^2}+3 \\ -2x & 1-5x & -3x \\ 4 & 7+x & 5 \end{vmatrix}=0$$

pentru orice x real.

2. Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, în care cateta $AC=3$ cm, iar unghiul ACB este de 30°. O dreaptă oarecare dusă prin vârful A intersectează ipotenuza BC în punctul M şi formează cu cateta AC unghiul $\widehat{MAC}=t$ $(0^\circ<t<90^\circ)$.

a) Să se determine unghiul t astfel încât triunghiurile MAB şi MAC să aibă arii egale.

b) Notând $\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}=x$, să se arate că volumul $V(x)$ al corpului obţinut prin rotaţia triunghiului MAC în jurul laturii MC, se poate exprima sub forma:

$$V(x)=\frac{9\pi x}{1+2x\sqrt{3}-x^2}.$$

c) Să se calculeze $V(x)$ pentru $t=30^\circ$.

d) Să se studieze variaţia funcţiei $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{1+2x\sqrt{3}-x^2}$ şi să se reprezinte grafic.