EXAMEN DE BACALAUREAT 1974
SESIUNEA IUNIE

1. Se dă funcţia
$$f : E \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 1},$$
unde E este domeniul maxim de definiţie.

a) Să se studieze variaţia funcţiei şi să se reprezinte grafic.

b) Fie $M(2, 0)$ un punct pe grafic, iar A şi B punctele de intersecţie ale tangentei în M la grafic cu dreptele de ecuaţii $x - 1 = 0$, $x - y - 6 = 0$. Să se arate că M este mijlocul segmentului $[AB]$.

c) Să se arate că există numai 6 puncte pe graficul funcţiei f care au coordonate numere întregi.

d) Să se arate că punctul $(1, -5)$ este centrul de simetrie al graficului funcţiei date.

e) Să se calculeze aria suprafeţei limitată de graficul funcţiei $f(x) = x - 6 + \dfrac{4}{x - 1}$, axa Ox şi dreptele $x = 2$, $x = 5$.

2. Bazele unei prisme triunghiulare drepte sunt triunghiurile echilaterale ABC şi $A'B'C'$. Fie O un punct astfel ca $OA = OB = OC = OA' = OB' = OC' = a$, unde $a > 0$ este dat.

a) Să se arate că volumul prismei este egal cu $V(x) = \dfrac{1}{2}x^2\sqrt{3a^2 - x^2}$, unde x este latura bazelor.

b) Dacă a este dat, să se determine latura x a bazelor astfel ca volumul prismei să fie maxim.

c) În cazul $V(x)$ maxim:

(i) să se calculeze unghiul sub care se vede o latură a bazei, privită din punctul C;

(ii) să se arate că dacă S' este centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$, atunci $S'ABC$ este tetraedru regulat.

d) Să se arate că există o singură prismă triunghiulară dreaptă cu bazele triunghiuri echilaterale, astfel ca $OA = OB = OC = OA' = OB' = OC' = 1$, iar volumul să fie egal cu $\dfrac{1}{2}$.

e) Să se studieze variaţia funcţiei $f : E \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2\sqrt{3 - x^2}$, E fiind domeniul maxim de definiţie al funcţiei şi să se reprezinte grafic.

SESIUNEA AUGUST

1. Se dă funcţia $f : E \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - ax + b}{x+1}$, a, b fiind parametri reali, iar E domeniul maxim de definiţie al funcţiei.

- **a)** Să se determine a şi b ştiind că graficul funcţiei taie axa Ox în punctele de abscise $x = 0$ şi $x = 2$.
- **b)** Pentru $a = 2$ şi $b = 0$, să se studieze variaţia funcţiei şi să se reprezinte grafic.
- **c)** O dreaptă paralelă cu bisectoarea a doua intersectează în general graficul funcţiei în două puncte. Să se afle locul geometric al mijloacelor acestor coarde.
- **d)** Să se afle aria suprafeţei limitată de graficul funcţiei $g(x) = x - 3 + \dfrac{3}{x+1}$, axa Ox şi dreptele $x = 0$ şi $x = 4$.

2. Se dă funcţia $f : E \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x - 1}$, unde E este domeniul maxim de definiţie al funcţiei.

- **a)** Să se studieze variaţia funcţiei şi să se reprezinte grafic.
- **b)** Să se discute natura rădăcinilor ecuaţiei $f(x) = m$ folosind graficul funcţiei de la punctul a), ştiind că $m \in \mathbb{R}$.
- **c)** Să se determine aria triunghiului format de tangenta în punctul $M(2, f(2))$, perpendiculara pe tangenta în M şi axa Ox.
- **d)** Să se afle aria suprafeţei limitată de graficul funcţiei $g(x) = x^2 + x + 1 + \dfrac{2}{x-1}$, axa Ox şi dreptele $x = -1$ şi $x = 0$.