EXAMEN DE BACALAUREAT 1975
SESIUNEA IUNIE

1. Se dă funcţia

$$f : E \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^2 + 4x - 12}{x - 3},$$

unde E este domeniul maxim de definiţie.

a) Să se studieze variaţia funcţiei şi să se reprezinte grafic.

b) O paralelă la axa absciselor taie dreptele $x = 3$, $x - y + 7 = 0$ respectiv în A şi B, iar graficul funcţiei de la punctul a) în M şi N. Să se arate că $MA = BN$.

c) Dreptele de ecuaţie $x = 3$, $x-y+7 = 0$ se taie în P; aceste drepte sunt intersectate de o tangentă variabilă la graficul funcţiei f în Q şi R. Să se arate că aria triunghiului PQR este constantă.

d) Să se afle aria suprafeţei limitată de graficul funcţiei $f(x) = x + 7 + \dfrac{9}{x-3}$ şi axa abscidelor pentru $-6 \leq x \leq 2$.

2. O piramidă patrulateră regulată are muchiile laterale de lungime a.

a) Notând cu x înălţimea piramidei, să se calculeze volumul acesteia şi să se reprezinte grafic variaţia volumului în funcţie de înălţime.

b) Dacă α este unghiul format de două feţe laterale alăturate şi β unghiul pe care muchiile laterale îl formează cu laturile bazei, să se arate că

$$\cos\alpha + \operatorname{ctg}^2\beta = 0.$$

c) Se taie piramida cu un plan paralel cu baza. Să se demonstreze că condiţia necesară şi suficientă ca să existe un punct egal depărtat de cele şase feţe ale trunchiului de piramidă patrulateră regulată format este ca înălţimea trunchiului să fie medie proporţională între laturile bazei mari.

SESIUNEA AUGUST

1. Se dă funcţia $f : E \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x}$, unde E este domeniul maxim de definiţie al funcţiei.

a) Să se studieze variaţia funcţiei şi să se reprezinte grafic.

b) O paralelă la axa Ox taie graficul funcţiei date în P şi Q, axa Oy în R, iar dreapta $2x - y - 5 = 0$ în S. Să se arate că segmentele $[PQ]$ şi $[RS]$ au acelaşi mijloc.

c) Tangenta înr-un punct M al graficului funcţiei date taie axa Oy în A şi dreapta (d) de ecuaţie $2x-y-5 = 0$ în B.

(i) Să se calculeze raportul în care punctul M împarte segmentul $[AB]$.

(ii) Dacă C este punctul de intersecţie a dreptei (d) cu axa Oy, să se calculeze aria triunghiului ABC.

d) Să se afle aria suprafeţei limitată de graficul funcţiei $f(x) = 2x - 5 + \dfrac{2}{x}$ şi axa abscidelor pentru $1 \leq x \leq 2$.

2. Un paralelipiped are ca bază dreptunghiul $ABCD$, iar muchiile AB, AD şi AA' au lungimile respectiv a, b, c. Muchia AA' face cu AB Şi AD unghiuri egale cu x.

a) Să se arate că volumul paralelipipedului este

$$V = abc\sqrt{-\cos 2x}.$$

b) Să se studieze variaţia funcţiei

$$f : E \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{-\cos 2x},$$

unde E este domeniul maxim de definiţie al funcţiei.

c) Dacă α este unghiul feţei $ABB'A'$ cu baza $ABCD$ şi $\alpha < 90°$, să se arate că $\cos\alpha = \operatorname{ctg} x$.

d) Să se determine dimensiunile a, b, c ale paralelipipedului dat ştiind că acestea sunt în progresie aritmetică, unghiul x este drept şi că volumul este egal cu 6.