EXAMEN DE BACALAUREAT 1976
SESIUNEA IUNIE

A. Se dă funcţia

$$f : E \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1},$$

unde E este domeniul maxim de definiţie. Se notează cu M un punct de abscisă $t > 3$ de pe graficul funcţiei f şi cu N intersecţia paralelei prin M la axa Oy cu dreapta de ecuaţie $y = x + 2$.

1. Să se studieze şi să se reprezinte grafic funcţia f.

2. Să se calculeze lungimea $l(t)$ a segmentului $[MN]$.

3. Să se calculeze $\lim\limits_{t\to\infty} l(t)$.

4. Să se calculeze aria $S(t)$ a suprafeţei mărginită de graficul funcţiei f şi de dreptele de ecuaţii $y = x + 2$, $x = 3$ şi $x = t$.

5. Să se determine t, astfel încât $S(t) \le 4$.

6. Să se discute, după valorile parametrului real p, numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $|f(x)| = p$.

B. Pe semicercul de diametru $[AB]$, de centru O şi de rază r se consideră un punct oarecare M ce se proiectează pe AB în N; tangenta în M la semicerc intersectează în P şi Q tangentele duse în A şi B la semicerc.

1. Să se arate că unghiul $\widehat{POQ}$ este drept şi să se deducă de aici că

$$AP \cdot BQ = r^2.$$

2. Se notează cu x măsura în radiani a unghiului $\widehat{BOM}$.

a) Să se demonstreze relaţia

$$\frac{1}{AP} + \frac{1}{BQ} = \frac{2}{MN}.$$

b) Să se afle x pentru care aria trapezului $ABQP$ este minimă şi să se calculeze această valoare.

3. Se notează cu C mijlocul segmentului $[PQ]$. Se rotesc complet în jurul diametrului $[AB]$ triunghiurile OMC şi OMN; fie V_1 şi V_2 volumele corpurilor obţinute.

a) Să se exprime V_1 şi V_2 în funcţie de r şi x.

b) Să se afle x astfel încât $\dfrac{V_1}{V_2} = 20$.

SESIUNEA AUGUST

A. Se consideră semicercul $\overset{\frown}{ACB}$ de centru O, de rază egală cu 4 cm şi unde C este mijlocul arcului $\overset{\frown}{AB}$. Tangenta într-un punct M al semicercului taie în T pe cea în punctul A şi în P dreapta OC. Se notează cu θ unghiul $\widehat{AOT}$.

1. Să se calculeze, în funcţie de θ, lungimile laturilor patrulaterului $OATP$.

2. Să se demonstreze că $\triangle OTP$ este isoscel.

3. Să se arate că aria patrulaterului $OATP$ se poate exprima prin

$$S = 4 \cdot \frac{3\text{tg}^2\theta + 1}{\text{tg }\theta}.$$

4. Să se arate că există o valoare θ_0 a lui θ astfel încât $S = 8\sqrt{3}$.

5. Să se studieze variaţia funcţiei f de argument $x = \text{tg }\theta$,

$$f : E \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{12} \cdot S,$$

E fiind mulţimea valorilor admisibile pentru x.

6. Să se calculeze aria suprafeţei plane mărginită de curbele ce au drept ecuaţii $y = f(x)$, $y = x$, $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ şi $x = \sqrt{3}$.

B. **1.** **a)** Să se arate că funcţia

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x + c},\ x \neq -c,$$

admite două puncte de extrem, oricare ar fi numerele reale a, b, c care îndeplinesc condiţia $b > ac$.

b) Să se determine numerele reale a, b şi c astfel încât graficul funcţiei f să admită drept asimptote dreptele de ecuaţii $x = 1$ şi $y = x + 2$, iar punctul $P(2, 6)$ să aparţină graficului.

2. Să se studieze variaţia funcţiei reale $f(x) = \frac{x^2 + x}{x - 1}$, $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 0$. Să se calculeze aria suprafeţei limitată de graficul funcţiei, axa Ox, asimptota oblică şi tangenta menţionată.

3. Să se calculeze lungimile laturilor unui paralelogram în care lungimea uneia dintre diagonale este egală cu 1, iar unghiurile dintre această diagonală şi laturile paralelogramului sunt α şi β.