EXAMEN DE BACALAUREAT 1977
SESIUNEA IUNIE

A. Se consideră funcţia
$$f(x) = \frac{x}{1 + xe^{|x-1|}}.$$

1. Să se determine mulţimea maximă de definiţie.

2. Să se arate că graficul funcţiei admite o asimptotă verticală de ecuaţie $x = x_0$, unde $x_0 \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

3. Să se traseze curba $y = f(x)$.

4. Să se discute ecuaţia
$$m + x\left(me^{|x-1|} - 1\right) = 0,\ m \in \mathbb{R}.$$

B. Fie piramida hexagonală regulată cu vârful V şi baza $ABCDEF$.

1. Dacă laturile bazei au lungimea x, iar muchiile laterale au lungimea y, să se arate că aria laterală A şi volumul V ale piramidei sunt
$$A = \frac{3}{2}x\sqrt{4y^2 - x^2}, \quad V = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2\sqrt{y^2 - x^2}.$$

2. Fie u unghiul a două feţe laterale opuse, iar v unghiul a două feţe laterale alăturate ale piramidei. Să se demonstreze că:
$$\cos u - 4\cos v = 3.$$

3. Să se demonstreze că dintre toate piramidele hexagonale regulate având aceeaşi muchie laterală, cea de volum maxim este aceea în care muchiile VA, VC, VE sunt perpendiculare două câte două.

4. În cazul piramidei de volum maxim, se prelungeşte înălţimea VO a piramidei cu segmentul $[VM]$ egal cu înălţimea (V este mijlocul segmentului $[MO]$).
Să se demonstreze că $MACE$ este un tetraedru regulat.

SESIUNEA AUGUST

A. Se consideră funcţia $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + x - k}{x + 1}$, $k \in \mathbb{R}$.

1. Să se determine k astfel încât pentru $x = -2$, funcţia f să admită un extrem.

2. Să se studieze variaţia funcţiei f şi să se traseze graficul pentru $k = 3$.

3. Se consideră dreapta $x = a$, $a > 0$. Să se determine a astfel încât aria suprafeţei delimitată de $y = f(x)$, $x = 0$, $y = 0$ şi $x = a$ să fie egală cu $\ln \sqrt[3]{\left(\dfrac{8}{e}\right)^4}$.

4. Să se discute ecuaţia

$$x^3 + x^2 - (m - 1)x - m - 3 = 0$$

cu m real.

B. Se consideră piramida $SABCD$ cu baza un pătrat $ABCD$ şi SA perpendiculară pe planul bazei. Perimetrul bazei $ABCD$ este egal cu $4a$, iar lungimea segmentului $[SA]$ este egală cu lungimea diagonalei bazei. Se cere:

1. Aria şi volumul piramidei în funcţie de a.

2. Aria şi volumul sferei al cărei cerc mare este egal cu cercul circumscris triunghiului SAC.

3. Aria şi volumul trunchiului de piramidă care se obţine prin secţionarea piramidei printr-un plan paralel cu baza piramidei, planul trecând prin mijlocul unei dintre muchiile laterale ale piramidei.