EXAMEN DE BACALAUREAT 1978
SESIUNEA IUNIE

A. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile a, b, c. Sistemul

$$\begin{cases} a^2x - ay + z = a^3 \\ b^2x - by + z = b^3 \\ c^2x - cy + z = c^3 \end{cases}, a \neq b,\ b \neq c,\ c \neq a,$$

are ca soluţie tripletul (x, y, z). Se cere:

1. Să se arate că $2y$ reprezintă aria totală a paralelipipedului, iar z reprezintă volumul paralelipipedului.

2. Prin diagonala bazei trece un plan care face cu planul bazei unghiul u şi taie muchia opusă în punctul I. Să se exprime aria secţiunii în funcţie de u şi de laturile bazei.

3. Să se determine aria şi volumul sferei circumscrise paralelipipedului.

B. Fie polinomul $P(X) = X^3 + 3X^2 - mX + 5$.

1. Să se discute natura rădăcinilor ecuaţiei $P(x) = 0$ în funcţie de parametrul real m.

2. Să se rezolve ecuaţia $P(x) = 0$, în cazul în care admite o rădăcină dublă.

3. Să se determine m astfel încât rădăcinile ecuaţiei $P(x) = 0$, x_1, x_2, x_3 să satisfacă relaţia:

$$\operatorname{arctg} x_1 + \operatorname{arctg} x_2 + \operatorname{arctg} x_3 = \operatorname{arctg} \frac{1}{21}.$$

4. Să se traseze curba $y = P(x)$ pentru m obţinut la punctul 2.

SESIUNEA AUGUST

A. Se dă funcţia

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}\cdot$$

1. Să se determine valorile constantelor a, b, c, d astfel încât graficul funcţiei să-şi atingă extremele în punctele $x = -1$ şi $x = 3$, iar dreapta $y = x + 3$ să fie asimptotă oblică a graficului funcţiei.

2. Să se studieze variaţia şi să se reprezinte grafic funcţia de la punctul 1.

3. Să se calculeze aria suprafeţei determinată de graficul funcţiei, asimptota sa oblică şi dreptele de ecuaţii $x = 2$ şi $x = e + 1$.

4. Să se determine punctele planului prin care trece graficul funcţiei cu coordonatele exprimate prin numere întregi.

5. Să se detrmine coordonatele centrului de simetrie al graficului funcţiei.

B. Se dă piramida triunghiulară regulată $SABC$ cu laturile bazei egale cu z, iar muchiile laterale egale cu x.

1. Să se arate că volumul piramidei este

$$V = \frac{z^2\sqrt{3x^2 - z^2}}{12}$$

iar aria laterală

$$A = \frac{3z\sqrt{4x^2 - z^2}}{4}\cdot$$

2. Prin muchia AB se duce planul (APB) perpendicular pe SC (P fiind situat pe SC). Dacă u este unghiul diedru al planelor (SAC) şi (SBC), iar v unghiul diedru al planelor (APB) şi (ABC), să se arate că:

$$\cos u = \frac{3\cos^2 v - 1}{3\cos^2 v + 1}\cdot$$

3. Notând cu $S(x)$ aria triunghiului APB, să se traseze curba $y = S(x)$ pentru $z = \sqrt{3}$.