EXAMEN DE BACALAUREAT 1982
SESIUNEA IUNIE

I. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 4x + m)e^x$, m fiind un parametru real.

1. Să se determine m, astfel încât funcţia f să admită puncte de extrem.

2. Pentru $m = 4$ să se studieze variaţia şi să se construiască graficul funcţiei f.

3. Tot pentru $m = 4$, să se calculeze aria mulţimii mărginită de graficul funcţiei f, graficul funcţiei $g : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $g(x) = e^x$ şi dreptele de ecuaţii $x = 2$ şi $x = 3$.

II. Se consideră polinomul $f = X^4 + 2X^3 + aX^2 + bX + c$, cu a, b şi c numere reale.

1. Să se arate că pentru $a = 3$, polinomul f nu poate avea toate rădăcinile reale, oricare ar fi b şi c numere reale.

2. Să se determine numerele reale a, b şi c, astfel încât polinomul f împărţit la $X - 2$ să dea restul 30 şi ecuaţia $f(x) = 0$ să admită ca rădăcină numărul complex $-1 + i$. Să se afle apoi rădăcinile polinomului f.

III. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ cu elemente numere întregi. Să se arate că:

1. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, oricare ar fi n natural, $n \geq 1$.

2. Matricea A este inversabilă şi mulţimea G a tuturor matricelor A^k, k număr întreg, formează grup în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor.

SESIUNEA AUGUST

I. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{|x|}$.

1. Să se studieze variaţia şi să se construiască graficul funcţiei f.

2. Să se calculeze volumul corpului de rotaţie obţinut prin rotirea subgraficului funcţiei f în jurul axei Ox, $x \in [1, 3]$.

3. Să se discute după parametrul real λ numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $f(x) = \lambda$.

II. Să se arate că oricare ar fi $x \geq 0$, avem:

$$\ln(x + 1) \geq \frac{2x}{x + 2}.$$

III. Fie polinomul $f = X^4 - 2X^3 + X^2 + aX + b$, cu a şi b reali.

1. Să se determine a şi b astfel încât polinomul f să se dividă prin $X^2 + 1$.

2. Pentru $a = -2$ şi $b = 0$ să se calculeze suma $g(1) + g(2) + \ldots + g(n)$, unde g este câtul împărţirii polinomului f prin $X^2 + 1$.