EXAMEN DE BACALAUREAT 1983
SESIUNEA IUNIE

I. Se dă polinomul cu coeficienţi reali $f(X) = X^4 + aX^3 + bX + c$.

1. Să se determine a, b, c şi rădăcinile polinomului f, ştiind că $f(0) = f(1)$ şi una din rădăcini este $\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}\cdot$

2. Să se arate că oricare ar fi numărul real t diferit de zero, există numerele a, b, c astfel încât polinomul dat să se divide prin polinomul $g(X) = (X^2 - 1)(X - t)$.

II. Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \ln x$.

1. Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei f.

2. Să se traseze graficul funcţiei f.

3. Să se calculeze aria porţiunii din plan determinată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 1$, $x = e$.

III. Un con circular drept cu raza bazei R şi înălţimea $h = 2R$ se taie cu un plan paralel cu planul bazei, determinând un trunchi de con cu înălţimea d.

1. Să se calculeze volumul trunchiului de con astfel format în funcţie de R şi d.

2. Să se exprime d în funcţie de R, ştiind că în acest trunchi de con se poate înscrie o sferă.

SESIUNEA AUGUST

I. Fie $G = (3, +\infty)$ şi legea de compoziţie "$\star$" pe G definiă prin $x \star y = xy - 3x - 3y + 12$, oricare ar fi x, $y \in G$.

1. Arătaţi că $(G, \star)$ este grup comutativ.

2. Arătaţi că $\underbrace{a \star a \star \ldots \star a}_{n \text{ ori}}$, oricare ar fi $a \in G$.

II. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x^2$.

1. Să se studieze variaţia funcţiei f.

2. Să se construiască graficul funcţiei f.

3. Să se calculeze aria mulţimii din plan, cuprinsă între graficul funcţiei f şi dreapta de ecuaţie $y = 2x$.

III. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are lungimile bazelor a şi b $(a > b)$ şi unghiul pe care îl formează o muchie laterală cu planul bazei mari este egal cu $\dfrac{\pi}{4}\cdot$

1. Să se calculeze aria laterală a trunchiului de piramidă.

2. Să se calculeze aria laterală şi volumul piramidei din care provine trunchiul.