EXAMEN DE BACALAUREAT 1984 - PRINCIPAL
SESIUNEA IUNIE

I. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx - \ln(x^2 + 1)$, unde m este un parametru real.

1. Să se determine m astfel încât f să fie monoton descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

2. Pentru $m = -1$ să se studieze variaţia şi să se reprezinte grafic funcţia f.

3. Să se calculeze aria porţiunii din plan delimitată de graficul funcţiei f, axa $x'x$ şi dreptele de ecuaţii $x = -1$, $x = 0$, pentru $m = -1$.

II. Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $f = X^3 + aX^2 + bX + c$, unde a, b, $c \in \mathbb{R}$.

1. Să se exprime în funcţie de a, b, c determinantul

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}.$$

2. Să se determine o relaţie între numerele reale a, b, c astfel încât cele trei rădăcini ale lui f să aibă partea reală comună.

III. Mijlocul unui segment de dreaptă $[AC]$ de lungime $2a$ se notează cu B. Pe $[AB]$ şi $[AC]$ ca diametru se construiesc două semicercuri de aceeaşi parte a dreptei AC. O secantă (Δ) variabilă ce trece prin A taie cele două semicercuri în D respectiv E. Dacă α este măsura unghiului $\sphericalangle DAC$, se cere:

1. Să se exprime cu ajutorul lui a şi α volumul corpului obţinut prin rotaţia triunghiului CDE în jurul dreptei AC.

2. Să se determine α astfel încât volumul obţinut la punctul 1 să fie maxim.

SECUNDAR

I. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x + e^x, & \text{dacă } x \leq 0 \\ \sqrt{x^2+1}, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$.

1. Să se arate că funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$ şi să se calculeze o primitivă a sa.

2. Să se calculeze $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$.

II. Fie intervalul $G = (-1, 1)$. Să se arate că:

1. Dacă x, $y \in G$, atunci $\dfrac{x+y}{1+xy} \in G$.

2. Mulţimea G este grup abelian în raport cu legea de compoziţie definită prin

$$x \star y = \frac{x+y}{1+xy},\ (\forall)\, x, y \in G.$$

3. Funcţia $f : (0, \infty) \to (-1, 1)$, $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, $(\forall)\ x \in (0, \infty)$ este un izomorfism de la grupul $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ la grupul $(G, \star)$.

III. Să se rezolve sistemul cu coeficienţi în corpul $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{cases} \hat{4}x + \hat{3}y = \hat{2} \\ \hat{3}x + \hat{2}y = \hat{2} \end{cases}.$$

SESIUNEA AUGUST - PRINCIPAL

I. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}\backslash\{2,4\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + p}{x^2 - 6x + p}$.

1. Să se determine p astfel încât graficul funcţiei f să fie tangent axei Ox.

2. Pentru $p = 1$, să se studieze variaţia funcţiei f şi să se reprezinte grafic.

3. Să se calculeze aria suprafeţei din plan mărginită de graficul funcţiei f determinat la punctul 2, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = 1$.

II. Să se determine numerele reale a şi b şi apoi să se rezolve ecuaţia $x^4 - 2x^3 + ax^2 + bx + 2 = 0$, ştiind că admite rădăcina $\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$.

III. Razele bazelor unui trunchi de con sunt R şi r, iar generatoarea formează cu planul bazei mari un unghi de măsură u.

1. Să se calculeze aria laterală şi volumul trunchiului de con.

2. Să se determine muchia cubului înscris în conul mare (format de prelungirea generatoarelor trunchiului de con dat), pentru $u = 45°$.

SECUNDAR

I. Fie M mulţimea matricelor $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix}$, unde a, b, $c \in \mathbb{R}$.

1. Arătaţi că dacă A, $B \in M$, atunci $A \cdot B \in M$.

2. Care sunt elementele simetrizabile ale lui M în raport cu operaţia indusă?

II. Pe $\mathbb{Z}$ se defineşte legea de compoziţie:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ (x, y) \mapsto x \circ y = x + y - 1.$$

Să se arate că $(\mathbb{Z}, \circ)$ este un grup abelian.

III. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}\, dx$.