EXAMEN DE BACALAUREAT 1991
SESIUNEA IUNIE

I. Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $a > 0$.

1. Să se calculeze A^n, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

2. Să se calculeze matricea $B = \sum\limits_{k=1}^{n} A^k$.

3. Să se studieze dacă matricea B este inversabilă şi în caz afirmativ să se afle inversa ei.

II. Pe mulţimea $G = (0, \infty) \setminus \{1\}$ se defineşte legea de compoziţie internă:

$$(x, y) \mapsto x \star y = x^{\ln y}.$$

1. Să se arate că $(G, \star)$ este un grup abelian.

2. Considerând şi grupul $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, să se arate că $(G, \star) \simeq (\mathbb{R}^*, \cdot)$.

III. Fie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + ax}{bx - 2}$, $a, b \in \mathbb{N}^*$.

1. Să se determine domeniul maxim de definiţie D al funcţiei date.

2. Să se determine a şi b astfel ca funcţia dată să aibă puncte de extrem de abscise $x = -2$ şi $x = 6$.

3. Pentru valorile lui a şi b determinate la punctul 2, să se studieze şi să se reprezinte grafic funcţia dată.

4. Care este poziţia tangentelor la graficul funcţiei în punctele $(-2, 2)$ şi $(6, 18)$ faţă de axa Oy? Justificaţi răspunsul.

5. Tot pentru valorile lui a şi b determinate la punctul 2, să se afle aria suprafeţei plane limitate de graficul funcţiei, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = -6$ şi $x = 0$.