EXAMEN DE BACALAUREAT 1992
SESIUNEA IUNIE

I. Se dă matricea $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 2 & 3 \\ m^2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{R}$.

1. Să se rezolve ecuaţia $\det(M) = 0$.

2. Se consideră sistemul de ecuaţii liniare:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ mx + 2y + 3z = 0 \\ m^2 x + 4y + 9z = 0 \end{cases}.$$

a) Să se determine mulţimea valorilor lui m pentru care sistemul admite numai soluţia nulă.

b) Să se rezolve sistemul pentru $m = 2$ şi $m = 3$.

II. Pe mulţimea numerelor reale strict pozitive $\mathbb{R}_+^*$ se definesc legile de compoziţie ”$\top$” şi ”$\perp$” astfel:

1) $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $(x, y) \mapsto x \top y = \dfrac{x+y}{2}$.

2) $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $(x, y) \mapsto x \perp y = \sqrt{xy}$.

Pe mulţimea matricelor cu elemente numere reale $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ se defineşte legea de compoziţie ”$\star$” astfel:

3) $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $(A, B) \mapsto A \star B = AB + BA$.

Studiaţi asociativitatea, comutativitatea şi existenţa elementului neutru, pentru fiecare din aceste legi de compoziţie.

III. Fie funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{(x+a)^2}{bx - 1}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Să se determine D, domeniul maxim de definiţie al funcţiei f.

2. Să se determine a şi b astfel încât graficul funcţiei să admită dreapta de ecuaţie $y = x + 3$ ca asimptotă oblică.

3. Pentru $a = b = 1$ şi xOy un sistem de axe ortogonale:

a) Să se determine intersecţia graficului funcţiei f cu axele Ox şi Oy şi să se studieze existenţa asimptotei verticale în $x_0 = 1$.

b) Să se arate că pentru $x \in (-\infty, 1)$, $f(x) \leq 0$ şi pentru $x \in (1, \infty)$, $f(x) \geq 8$.

c) Să se reprezinte graficul funcţiei f în sistemul de axe xOy.

4. Să se calculeze aria domeniului plan determinat de graficul funcţiei f, axa Ox şi axa Oy.