EXAMEN DE BACALAUREAT 1994 - SESIUNEA SPECIALĂ
SESIUNEA IUNIE

I. **1.** În mulţimea matricelor pătratice $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Daţi tabela înmulţirii matricelor I_2 şi U.

b) Arătaţi că $U(2I_2 - U) = O_2$.

c) Calculaţi $(I_2 + U)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

II. **1.** Să se rezolve ecuaţia $x^2 - x - \hat{1} = \hat{0}$ în $\mathbb{Z}_5$, apoi în $\mathbb{Z}_{100}$.

2. În mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie ”$\star$” prin:

$$x \star y = x + y - xy,\ (\forall)\, x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Studiaţi proprietăţile legii de compoziţie ”$\star$”.

b) Calculaţi $\underbrace{x \star x \star \ldots \star x}_{n \text{ ori}}$.

c) Arătaţi că $\mathbb{R}$ împreună cu înmulţirea este izomorf cu $\mathbb{R}$ împreună cu ”$\star$”.

d) Există o lege de compoziţie ”$\circ$” în $\mathbb{R}$ astfel ca $(\mathbb{R}, \circ, \star)$ să fie corp?

III. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = |x - 2|e^{|x|}$.

1. Să se reprezinte grafic funcţia f folosind şi derivata a doua.

2. Să se arate că funcţia f admite primitive şi să se afle primitiva al cărui grafic trece prin origine.

SESIUNEA IUNIE

I. **1.** Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Stabiliţi o relaţie între A, B şi I_3.

b) Calculaţi B^n, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

c) Calculaţi A^n, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

2. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ având zerourile a, b, c distinste două câte două. Aflaţi α, β, γ în funcţie de a, b, c.

II. Fie $G = (0, \infty) \backslash \{1\}$ pe care definim legea de compoziţie $G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto x \star y = x^{\ln y}$. Să se arate că:

1. $(G, \star)$ este grup abelian al cărui element neutru este e_1.

2. Mulţimea $H = \{e_1^u \,|\, u \in \mathbb{Q}\}$ este subgrup al lui G, unde e_1 este elementul neutru de la punctul 1.

III. Fie funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = -x + 2 - 4\dfrac{\ln x}{x}\cdot$

a) Calculaţi limitele funcţiei f în 0 şi la $+\infty$.

b) Determinaţi asimptota oblică la graficul funcţiei f spre $+\infty$. Această asimptotă intersectează graficul funcţiei f într-un punct A. Aflaţi coordonatele punctului A.

c) Folosind derivatele f' şi f'' ale funcţiei f, întocmiţi tabelul de variaţie al funcţiei, ştiind că f' nu se anulează pe $(0, +\infty)$ ($e \approx 2,7$; $e^{\frac{3}{2}} \approx 4,5$; $f(e^{\frac{3}{2}}) \approx -3,8$).

d) Reprezentaţi graficul funcţiei f şi tangenta la grafic în $A(1, 1)$ în planul raportat la un sistem de axe ortogonale xOy.

e) Aflaţi coorodonatele punctului B în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu asimptota oblică $y = -x + 2$.

f) Fie funcţia $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x) = -x + 2 - \dfrac{4}{x}\cdot$ Aflaţi aria mulţimii punctelor din plan limitată de grficele funcţiilor f şi g şi de dreapta de ecuaţie $x = 1$.