EXAMEN DE BACALAUREAT 1995
SESIUNEA IUNIE

I. Se dă ecuaţia algebrică

$$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 10x + 25 = 0.$$

a) Să se rezolve ecuaţia ştiind că suma primelor două rădăcini este egală cu opusa mediei aritmetice a celorlalte două rădăcini.

b) Să se arate că imaginile A, B, C, D ale numerelor complexe $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 1 + 2i$, $z_3 = -2 + i$, respectiv $z_4 = -2 - i$ în planul complex sunt puncte ale unui cerc căruia se cere să i se determine ecuaţia.

c) Să se reprezinte în planul complex punctele A, B, C, D şi să se demonstreze că patrulaterul $ABCD$ este un trapez isoscel.

2. Să se rezolve sistemul de ecuaţii liniare:

$$\begin{cases} (1+a)x + by + cz + dt = 0 \\ ax + (1+b)y + cz + dt = 0 \\ ax + by + (1+c)z + dt = 0 \\ ax + by + cz + (1+d)t = 0 \end{cases},$$

a, b, $c \in \mathbb{R}$ şi $1 + a + b + c + d \neq 0$.

II. 1. Fie polinoamele f, $g \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = \hat{2}X^4 + \hat{3}X^3 + \hat{4}X^2 + X + \hat{3}$, $g = \hat{3}X^2 + \hat{3}X + \hat{4}$. Să se afle câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul g.

2. Fie mulţimea $G = \{f_n : (2, \infty) \to \mathbb{R} \,|\, f_n(x) = 2 + (x-2)^{2^n},\ n \in \mathbb{Z}\}$. Să se arate că $(G, \circ)$ este grup comutativ izomorf cu grupul comutativ $(\mathbb{Z}, +)$, unde "$\circ$" este operaţia de compunere a funcţiilor.

III. Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + 3 + \dfrac{2\ln x - 1}{x}$.

a) Să se calculeze limitele funcţiei f în 0 şi la $+\infty$.

b) Determinaţi asimptota oblică la ramura graficului funcţiei f spre $+\infty$; cercetaţia dacă această asimptotă intersectează graficul funcţiei şi, în caz afirmativ, determinaţi coordonatele punctului de intersecţie.

c) Aflaţi coordonatele punctului în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu asimptota oblică de ecuaţie $y = -\dfrac{1}{2}x + 3$.

d) Calculaţi

$$I_n = \int_{e^{\frac{n+1}{2}}}^{e^{\frac{n+2}{2}}} \left[f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 3 \right) \right] \, dx$$

şi arătaţi că $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este o progresie aritmetică, a cărei raţie o veţi preciza ($n \in \mathbb{N}$).