EXAMEN DE BACALAUREAT 1997
SESIUNEA IUNIE

I. Fie $G = (2, \infty)$. Arătaţi că $(x, y) \mapsto x \star y = xy - 2x - 2y + 6$ determină pe G o structură de grup abelian şi arătaţi că funcţia $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = e^{ax} + 2$ este un izomorfism între grupul aditiv al numerelor reale şi grupul $(G, \star)$, pentru orice $a \in \mathbb{R}^*$.

II. Se consideră funcţia $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha x^2 + \beta x - \ln(x + 1)$, unde $\alpha < 0$, $\beta \in \mathbb{R}$.

1. Demonstraţi că funcţia f are două puncte de extrem dacă şi numai dacă $\beta - 2\alpha > 2\sqrt{-2\alpha} > 0$.

2. Pentru $\alpha = -\beta = -1$, trasaţi graficul funcţiei f şi calculaţi aria suprafeţei plane cuprinse între graficul lui f şi axa Ox, pentru $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$.

III. **1.** Rezolvaţi sistemul $\begin{cases} \log_3(\lg x + \lg y) - \log_9(\lg y) = 1 \\ \log_9(\lg x - \lg y) - \log_3(\lg y) = 0 \end{cases}$.

2. Determinaţi rangul matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & m & 1 \\ m & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & m \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,4}(\mathbb{C})$.