

BACALAUREAT 2000
SIMULARE - MARTIE
Varianta 1

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

Se dau funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 8x^2 - 8$ și $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \ln x$.

1. Să se calculeze $(f + g)\left(\frac{3}{4}\right)$ și $(f + g)(1)$.
2. Să se arate că $f + g$ este strict crescătoare pe $(0, \infty)$.
3. Să se deducă din 1. și 2. că ecuația $(f + g)(x) = 0$ are o singură rădăcină în intervalul $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$.
4. Se notează cu $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ și cu $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.
 - a) Să se calculeze S_1, S_2 și S_3 .
 - b) Să se arate că $S_n \in \mathbb{Z}$, $(\forall) n \geq 1$.

SUBIECTUL II

Se consideră mulțimea $G = \left\{ A(x) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Să se arate că $A(x) \cdot A(y) = A(x + y)$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$.
2. Folosind eventual rezultatul de la 1., să se arate că:
 - a) $A(x) \cdot A(y) = A(y) \cdot A(x)$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$.
 - b) $A(x) \cdot A(0) = A(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - c) $A(x) \cdot A(-x) = A(0)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - d) Să se arate că (G, \cdot) este grup comutativ.
3. Să se calculeze $A^n(2)$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL III

Se dă funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[4]{2 - \lg x}$, unde D este domeniul maxim de definiție al funcției.

1. Să se determine D .
2. Să se determine $x \in D$ astfel încât termenul al cincilea din dezvoltarea binomului $(1 + x^{f(x)})^6$ să fie 15.
3.
 - a) Să se calculeze $f'(x)$ pentru $x \in (0, 100)$.
 - b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției în punctul $A(10, f(10))$.

SUBIECTUL IV

Se definește șirul $(I_n)_{n \geq 0}$ prin: $I_0 = \int_0^1 e^x dx$ și $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$, $(\forall) n \geq 1$.

1. Să se calculeze I_0 și I_1 .
2. Utilizând integrarea prin părți, să se demonstreze că $I_{n+1} = e - (n + 1)I_n$, $(\forall) n \geq 0$.
3. Să se arate că șirul $(I_n)_{n \geq 0}$ este:
 - a) descrescător;
 - b) convergent.
4. Să se calculeze:
 - a) $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$;
 - b) $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$.

Varianta 2

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

Se consideră sistemul
$$\begin{cases} -ax + y + z = -1 \\ x - ay + z = a \\ x + y - z = 2 \end{cases},$$
 unde a este parametru real.

1. Să se determine valorile lui a pentru care sistemul are soluție unică.
2. Să se rezolve sistemul pentru $a = -1$.
3. Să se arate că pentru $a = 3$ sistemul nu are soluții.

SUBIECTUL II

Fie $P(X) = X^2 - 4X + 3$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, se definește șirul $(a_n)_{n \geq 4}$ prin $a_n = \frac{1}{P(4)} + \frac{1}{P(5)} + \frac{1}{P(6)} + \dots + \frac{1}{P(n)}$.

1. Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n \geq 4}$ este crescător.
2. Să se arate că $a_n = \frac{(n-3)(3n-4)}{4(n-1)(n-2)}$, $(\forall) n \geq 4$.
3. Să se deducă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

SUBIECTUL III

Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ se consideră funcția $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = (x^2 - 4x + 3)^{2n+1}$.

1. Să se arate că $f_n(x) \geq f_n(2)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$.
2. Dreapta $y = a$ cu $a > -1$ intersectează graficul funcției în punctele A și B . Să se calculeze coordonatele mijlocului segmentului $[AB]$.
3.
 - a) Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuației $f_2(x) = 0$.
 - b) Să se afle care dintre rădăcini sunt puncte de extrem ale funcției f_2 .
4. Să se calculeze $\int \frac{dx}{f_0(x)}$, $x \in (1, 3)$.

SUBIECTUL IV

Se dă polinomul $S(X) = (X^2 - 4X + 3)^7$.

1.
 - a) Să se afle toate rădăcinile x_i , $1 \leq i \leq 14$ ale polinomului dat.
 - b) Să se calculeze $\sum_{i=1}^{14} x_i$ și $\sum_{i=1}^{14} \frac{1}{x_i}$.
2. Forma algebrică a polinomului dat este $S(X) = \sum_{k=0}^{14} a_k X^k$. Folosind eventual relațiile dintre rădăcini și coeficienți, să se deducă valorile coeficienților a_{13} și a_1 .
3. Să se demonstreze că există $p, q \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $S(\sqrt{2}) = p - q\sqrt{2}$.

SIMULARE - MARTIE
Varianta 1

Profilul economic, fizică-chimie, chimie-biologie

SUBIECTUL I

Fie $a, b \in (0, \infty)$ și funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{ax^2 + b}{x - 1}$.

1. Să se calculeze:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$.

c) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x)$ și $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$.

2. a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) Să se arate că funcția f' are pe $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ două rădăcini distincte.

c) Să se determine punctul de maxim al funcției f .

SUBIECTUL II

Fie șirurile $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(b_n)_{n \geq 1}$ definite astfel: $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ și $b_n = \ln a_n$, $n \geq 1$.

1. Să se arate că $(\exists) q \in \mathbb{R}$ astfel încât $a_{n+1} = qa_n$, $(\forall) n \geq 1$.

2. a) Să se calculeze $b_{n+1} - b_n$, $n \geq 1$.

b) Să se precizeze care dintre cele două șiruri este progresie aritmetică.

3. Să se calculeze:

a) $a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) $b_1 + b_2 + \dots + b_n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$.

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^n a_k \right) \cdot \sum_{k=1}^n b_k$.

SUBIECTUL III

Pentru $x \in \mathbb{R}$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} x-2 & 1 \\ 1 & x-2 \end{pmatrix}$.

1. Să se determine valorile lui x pentru care $\det A = 0$.

2. a) Să se calculeze A^2 .

b) Să se demonstreze că $A^2 = (2x - 4)A - \det A \cdot I_2$.

3. Să se arate că $A^2 = (2x - 4)A$ dacă și numai dacă $x \in \{1; 3\}$.

4. Dacă $x = 3$, să se demonstreze că $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL IV

Se dă funcția $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x\sqrt{2} - \sqrt{3})^{10}$.

1. Să se calculeze $\int f(x) dx$, $x \in [0, 3]$.

2. Fie $F : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a lui f .
 - a) Să se studieze monotonia funcției F .
 - b) Să se determine punctele de extrem ale funcției F .
3. Să se rezolve ecuația $F''(x) < 0$, $x \in [0, 3]$.
4. Să se demonstreze că tangentele la graficul funcției F în punctele $A(0, F(0))$ și $B(\sqrt{6}, F(\sqrt{6}))$ sunt paralele.

Varianta 2

SUBIECTUL I

Se consideră polinomul $P(X) = X^2(X - 2)^2 + a$, $a \in \mathbb{R}$.

1. Să se calculeze $P(1 - i)$.
2. Să se arate că $P(1 - i) = P(1 + i)$.
3. Să se formeze o ecuație de gradul al doilea cu coeficienți reali care admite ca rădăcini numerele $1 + i$ și $1 - i$.
4. Dacă $P(X)$ are rădăcina $1 + i$, să se rezolve ecuația $P(x) = 0$.

SUBIECTUL II

Se consideră $f, g : \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin $f(n) = \begin{vmatrix} C_n^0 & C_n^1 \\ C_n^2 & C_n^3 \end{vmatrix}$, $g(n) = \begin{vmatrix} A_n^0 & A_n^1 \\ A_n^2 & A_n^3 \end{vmatrix}$, $n \geq 3$.

1. Să se arate că $f(n) = \frac{n - n^3}{3}$ și $g(n) = 2n - 2n^2$, $n \geq 3$.
2. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n^2)}{g(n^3)}$.
3. a) Să se arate că există $A, B \in \mathbb{R}$ astfel încât $\frac{1}{f(k)} = \frac{A}{(k-1)k} + \frac{B}{k(k+1)}$, $(\forall) k \in \mathbb{N}, k \geq 3$.
b) Să se calculeze $\sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)}$, pentru $n \geq 3$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3}^n \frac{1}{f(k)}$.

SUBIECTUL III

Pe \mathbb{R} se definește legea de compoziție "★" prin $x \star y = xy - (x + y)\sqrt{2} + 2 + \sqrt{2}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

1. a) Să se arate că legea "★" este comutativă.
b) Să se arate că intervalul $[\sqrt{2}, \infty)$ este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea "★".
2. a) Să se determine $y \in [\sqrt{2}, \infty)$ astfel încât $x \star y = x$, $(\forall) x \in [\sqrt{2}, \infty)$.
b) Să se deducă existența elementului neutru al legii "★" pe $[\sqrt{2}, \infty)$.
c) Pentru $a \in (\sqrt{2}, \infty)$ fixat, să se determine $y \in (\sqrt{2}, \infty)$ care verifică relația $a \star y = 1 + \sqrt{2}$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 1 - \cos x$.

1. a) Să se calculeze $f(0)$ și $f(1)$.
b) Să se demonstreze că f are cel puțin o rădăcină în intervalul $(0, 1)$.
2. a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in [0, 1]$.
b) Să se demonstreze că f' are semn constant pe $[0, 1]$.
c) Să se demonstreze că f are o singură rădăcină în intervalul $(0, 1)$.
3. Să se calculeze:
a) $\int f(x) dx$, $x \in [0, 1]$.
b) $\int_0^1 f(x) dx$

SIMULARE - MARTIE
Varianta 1

Profilul industrial silvic, agricol, sportiv-real

SUBIECTUL I

Pentru $a, b \in \mathbb{R}$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a-1 & b^2+1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$.

1. a) Să se calculeze $\det A$.
b) Să se arate că $\det A \geq 0$, $(\forall) a, b \in \mathbb{R}$.
c) Să se arate că $\det A = 0 \Leftrightarrow a = 1$ și $b = 0$.
2. Pentru $a = b = 1$ să se calculeze:
a) A^2 și A^4 .
b) A^{-1} folosind eventual 2. a).
c) A^{2000} .
3. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^2 = -4I_2$.

SUBIECTUL II

Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{x}{x+1}$, unde D este domeniul maxim de definiție al funcției.

1. a) Să se determine D .
b) Să se determine $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ și $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
2. a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in D$.
b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .
c) Să se arate că există $A, B \in \mathbb{R}$ astfel încât
$$f'(x) = \frac{A}{x} - \frac{B}{x+1}, x \in D.$$

d) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (f'(1) + f'(2) + \dots + f'(n))$.
3. Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1, f(1))$.

SUBIECTUL III

Pe \mathbb{R} se definește legea " \star " prin $x \star y = x + ay + 3$, $a \in \mathbb{R}$.

1. Să se arate că " \star " este comutativă $\Leftrightarrow a = 1$.
2. Fie $I = [-3, \infty)$ și $a = 1$. Să se arate că:
a) I este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea " \star ".
b) " \star " are element neutru pe 1.
c) I conține un singur element simetrizabil în raport cu legea " \star ".
3. Pentru $a = 1$ să se rezolve ecuația $x \star x \star x \star x \star x \star x \star x = 37$.

SUBIECTUL IV

Se dă funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (2x - 3)^5$.

1. Să se calculeze $\int f(x) dx$.
2. Fie $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a funcției f . Să se calculeze $F''(x)$.
3. Știind că $f(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, să se calculeze a_3 și $\frac{a_4}{a_5}$.

Varianta 2

SUBIECTUL I

Pentru $m \in \mathbb{R}$ se consideră sistemul
$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \\ 3x + my = 5 \end{cases}.$$

1. Să se rezolve sistemul pentru $m = 2$.
2. Să se arate că pentru $m \neq 2$ sistemul nu are soluții.
3. Într-un sistem cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele $d_1 : x + 2y - 3 = 0$, $d_2 : 2x - y - 1 = 0$ și $d_m : 3x + my - 5 = 0$, $m \in \mathbb{R}$.
 - a) Să se deducă din 1. că dreptele d_1 și d_2 se intersectează în $A(1, 1)$.
 - b) Să se deducă din 1. și 2. că $A \in d_m$ dacă și numai dacă $m = 2$.

SUBIECTUL II

Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2} - x$, unde D este domeniul maxim de definiție.

1. Să se determine D .
2. Să se determine coordonatele punctului de intersecție al graficului funcției f cu axa Ox .
3. Să se calculeze:
 - a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
 - b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

SUBIECTUL III

Se consideră mulțimea $G = \left\{ A(x) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Să se arate că $A(x)A(y) = A(x+y)$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$.
2. Să se arate că:
 - a) $A(x)A(y) = A(y)A(x)$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$.
 - b) $A(x)A(0) = A(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - c) $A(x)A(-x) = A(0)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - d) (G, \cdot) este grup comutativ.
3. Să se calculeze $A^n(3)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL IV

Fie $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 1}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Să se determine $f'(x)$, $x \in (1, \infty)$.
2. Să se determine a și b astfel încât $f(2) = 1$ și $f'(2) = 0$.
3. Dacă $a = -3$ și $b = 3$, se cere:
 - a) Să se stabilească semnul lui f' pe $(1, \infty)$.
 - b) Să se determine intervalele de monotonie ale lui f .
4. Să se calculeze $\int \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} dx$, $x \in (1, \infty)$ și $\int_2^3 \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} dx$.

SIMULARE - MARTIE
Varianta 1

Profilul pedagogic

SUBIECTUL I

1. Să se demonstreze că suma $S = \overline{ab4} + \overline{aba} + \overline{a1b}$ este divizibilă cu 7 (termenii sumei sunt numere naturale în baza 10).
2. Suma a trei numere naturale este 37. Dacă se mărește primul cu 150% din el, al doilea se micșorează cu 25% din el, iar al treilea se micșorează cu 5, atunci numerele obținute sunt egale. Să se afle numerele.

SUBIECTUL II

1. Determinați elementele mulțimii $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{6x+9}{3x+2} \in \mathbb{Z} \right\}$
2. Să se determine rădăcinile polinomului $P(X) = 2X^3 - 7X^2 - 5X + 4$, știind că $P(X)$ este divizibil cu $X + 1$.
3. Să se rezolve ecuațiile:
 - a) $9^{x^2-1} - 4 \cdot 3^{x^2-1} + 3 = 0$.
 - b) $\log_3 \frac{x+5}{x+3} + 2 \log_9(x+1) = 1$.

SUBIECTUL III

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ x & -1 & x \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}$.
 - a) Să se calculeze $\det A$.
 - b) Să se determine valorile parametrului real m astfel încât matricea A să fie inversabilă pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
2. Pe mulțimea \mathbb{R} definim legea de compoziție $x \star y = xy + 3x + 3y + 6$.
 - a) Să se arate că (\mathbb{R}, \star) este monoid comutativ.
 - b) Să se găsească elementele inversabile ale monoidului.

SUBIECTUL IV

1. Fie un triunghi ABC , dreptunghic în A , iar D mijlocul segmentului $[BC]$. Punctul E este simetricul lui B față de dreapta AD . Să se arate că:
 - a) $EC \parallel AD$.
 - b) Punctele A, B, C, E sunt vârfurile unui patrulater inscriptibil.
2. Se consideră tetraedrul $SABC$ ale cărui muchii $[SA], [SB], [SC]$ sunt două câte două perpendiculare și $BC = a, AC = b, AB = c$. Se cere:
 - a) Să se calculeze lungimile muchiilor $[SA], [SB], [SC]$.
 - b) Să se calculeze volumul tetraedrului $SABC$.
 - c) Să se arate că proiecția H a lui S pe planul (ABC) coincide cu punctul de concurență al înălțimilor triunghiului ABC .
 - d) Să se arate că aria triunghiului SBC este medie proporțională între ariile triunghiurilor HBC și ABC .

Varianta 2

SUBIECTUL I

- Într-o clasă sunt băieți și fete. Numărul băieților este cu 3 mai mare decât numărul fetelor. Dacă ar mai veni 4 băieți și ar pleca 4 fete, atunci numărul băieților ar fi de două ori mai mare decât numărul fetelor. Să se afle câți elevi sunt în clasă.
- Să se afle $z \in \mathbb{Z}$ astfel încât fracția $\frac{3x+5}{2x-3}$ să reprezinte un număr întreg.

SUBIECTUL II

Fie ecuația $x^2 - mx + m - 1 = 0$, unde m este parametru real și x_1, x_2 soluțiile ei.

- a) Să se determine valorile parametrului m pentru care are loc relația

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2} > x_1 + x_2.$$

- b) Să se determine m astfel încât $x_1^{10} + x_2^{10} = 2$.

SUBIECTUL III

- Să se rezolve ecuația $\log_5(x+5) = 3 - \log_5(x+25)$.
- Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și matricea $B = \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Determinați $u, v \in \mathbb{R}$ pentru care are loc egalitatea $AB = BA$.
- Pe mulțimea $G = (3, \infty)$ se definește legea "★" prin $x \star y = xy - 3(x+y) + 12$.
 - Să se arate că (G, \star) este grup comutativ.
 - Să se rezolve ecuația $x \star 8 = 13$.

SUBIECTUL IV

- Se consideră rombul $ABCD$ și un punct $F \in (BC)$. Dreapta DF intersectează dreapta AB în E . Notăm cu M mijlocul lui $[DF]$ și cu G mijlocul lui $[EF]$. Să se arate că:
 - triunghiurile BEG și CDM sunt asemenea;
 - $CD \cdot BG = CM \cdot BE$;
 - $AD^2 = AE \cdot CF$.
- Un paralelipiped dreptunghic are lungimea diagonalei egală cu $5\sqrt{38}$ cm și dimensiunile direct proporționale cu numerele 2, 3 și 5.
 - Să se calculeze dimensiunile paralelipipedului.
 - Să se calculeze aria totală și volumul paralelipipedului.
 - Paralelipipedul este din lemn. Se vopsesc toate fețele lui, apoi se taie cu plane paralele cu fețele astfel încât să se obțină cuburi cu muchia de 5 cm.
 - Câte tăieturi se vor face în total.
 - Dintre cuburile obținute câte au vopsite numai trei fețe? Dar numai o față?

SESIUNEA IUNIE
Varianta 1

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^5 + bx^2 + c$, a, b, c parametri reali. Să se determine a, b și c astfel încât să fie îndeplinite simultan următoarele condiții:

$$f(0) = 1, \quad f'(1) = 36, \quad \int_0^1 f(x) dx = 3.$$

2. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Să se determine matricele A^2 și A^3 .
b) Să se determine matricea $B = 6A^5 - 3A^2 + 6I_2$.
c) Să se calculeze determinantul matricei B .
3. Să se rezolve ecuația $\log_2(25^x + 7) = 2 + \log_2(5^x + 1)$.
4. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(4, 5)$, $B(-2, -3)$ și $C(5, 4)$.
- a) Să se calculeze lungimile segmentelor $[AB]$, $[BC]$ și $[AC]$.
b) Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.
c) Să se determine coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC .

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 + aX - 5$, $a \in \mathbb{R}$. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, definim $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, unde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului f .

- a) Să se arate că $S_3 - 3S_2 + aS_1 - 15 = 0$.
b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $S_3 = -21$.

2. Se consideră funcțiile $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x} \sin x$, $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} \sin x - \frac{1}{2}e^{-x} \cos x$ și $I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x) dx$, $n \in \mathbb{N}$.

- a) Să se arate că F este o primitivă a funcției f .
b) Să se calculeze I_0 și să se arate că $I_k = (-1)^k e^{-k\pi} I_0$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

SUBIECTUL III

Se consideră mulțimea numerelor reale \mathbb{R} și submulțimea sa $G = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 2b^2 = 1\}$.

- a) Să se demonstreze că dacă $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ și $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$, atunci $a = c$ și $b = d$.
b) Să se demonstreze că G este parte stabilă a lui \mathbb{R} față de operația de înmulțire a numerelor reale.
c) Să se arate că dacă $x = a + b\sqrt{2}$ și $x \in G$, atunci $x \neq 0$ și $\frac{1}{x} \in G$.
d) Să se găsească un element $x = a + b\sqrt{2} \in G$ cu proprietatea că $b \neq 0$.
e) Să se arate că mulțimea G are cel puțin 200 de elemente.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{3}{7}\right)^x + \left(\frac{4}{7}\right)^x - 1$ și $g(x) = f(x) - 1 + x$.

- a) Să se determine $g'(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- b) Să se stabilească semnul funcției g'' și să se precizeze monotonia funcției g' .
- c) Utilizând teorema lui Rolle pentru funcția g să se demonstreze că există $c \in (0, 1)$ astfel încât $g'(c) = 0$. Să se arate că punctul c este unic.
- d) Deduceți că funcția g este strict descrescătoare pe $(0, c)$ și strict crescătoare pe $(c, 1)$, unde c este definit la punctul c).
- e) Să se arate că pentru orice $x \in [0, 1]$, $g(x) \leq 1$.
- f) Să se arate că aria suprafeței plane limitate de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$, $x = 1$, este mai mică decât $\frac{1}{2}$.

Varianta 2

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

- Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f = X^3 + 6X^2 + 11X + 6$.
 - Să se calculeze $f(-1)$.
 - Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la $X + 1$.
 - Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.
- Să se rezolve inecuația $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n \geq 64$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- Se consideră funcția $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{6x^5 + 3x^2 + 1}{x^4}$. Să se stabilească asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției g .
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(3, 4)$, $B(-3, -4)$ și $C(3, -4)$.
 - Să se calculeze lungimile segmentelor $[AB]$, $[BC]$ și $[AC]$.
 - Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.
 - Să se determine coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC .

SUBIECTUL II

- Se consideră mulțimea numerelor reale \mathbb{R} pe care se definește legea de compoziție $x \star y = 2xy - 6x - 6y + 21$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că legea " \star " este asociativă și comutativă.
 - Să se determine elementul neutru legii " \star ".
 - Considerăm mulțimea $G = (3, \infty)$. Să se demonstreze că G este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea " \star ".
- Se consideră funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + x3^x)$. Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ se definește $I_k = \int_0^1 \frac{3^k x}{1 + k3^k x^2} dx$.
 - Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{2x}$.
 - Să se calculeze I_k , $k \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL III

- Să se arate că $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y)$.
- Se consideră a, b, c, d numere reale distincte două câte două. Se definesc funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ și $g(x) = x^2 + x + 1$.
 - Să se arate că $f'(x) = (a-b)(a-c)(a-d)$.
 - Să se demonstreze că $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ g(a) & g(b) & g(c) & g(d) \end{vmatrix} = 0$.
 - Dezvoltând determinantul Δ după ultima linie, deduceți identitatea

$$\frac{g(a)}{f'(a)} + \frac{g(b)}{f'(b)} + \frac{g(c)}{f'(c)} + \frac{g(d)}{f'(d)} = 0.$$

SUBIECTUL IV

Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{3}{8}\right)^x + \left(\frac{5}{8}\right)^x - 1$ și $g(x) = f(x) - 1 + x$.

- a) Să se determine $g'(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- b) Să se stabilească semnul funcției g'' și să se precizeze monotonia funcției g' .
- c) Utilizând teorema lui Rolle pentru funcția g să se demonstreze că există $a \in (0, 1)$ astfel încât $g'(a) = 0$. Să se arate că punctul a este unic.
- d) Deduceți că funcția g este strict descrescătoare pe $(0, a)$ și strict crescătoare pe $(a, 1)$, unde a este definit la punctul c).
- e) Deduceți că pentru orice $x \in [0, 1]$, $g(x) \leq 0$.
- f) Să se arate că aria suprafeței plane limitate de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$, $x = 1$, este mai mică decât $\frac{1}{2}$.

Varianta 3

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$.
 - Să se determine $f'(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se rezolve ecuația $f'(x) = 0$.
 - Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- Se consideră mulțimea numerelor reale \mathbb{R} pe care se definește legea de compoziție $x \star y = x + y + 4$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că legea " \star " este asociativă.
 - Să se arate că $e = -4$ este elementul neutru al legii " \star ".
 - Să se verifice că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este adevărată relația $x \star (-x - 8) = -4$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră cercul de ecuație $(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 169$.
 - Să se determine coordonatele centrului și raza cercului.
 - Să se verifice că punctul $P(2, 7)$ este situat pe cerc.
 - Să se scrie ecuația tangentei la cerc în punctul $P(2, 7)$.

SUBIECTUL II

- Se consideră polinomul $(1 + X + X^2)^{10}$ cu forma sa algebrică $f = a_{20}X^{20} + \dots + a_1X + a_0$.
 - Să se determine a_0 și a_1 .
 - Să se calculeze $f(1)$, $f(-1)$, $f(i)$.
 - Să se calculeze suma coeficienților polinomului f .
 - Să se arate că $a_0 + a_4 + \dots + a_{16} + a_{20} = \frac{1}{4}(f(1) + f(-1) + f(i) + f(-i))$.
- Se consideră funcțiile $f, F : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)^2 \ln(x+1)$ și $F(x) = \frac{(x+1)^3}{3} \ln(x+1) - \frac{(x+1)^3}{9} + \frac{1}{9}$.
 - Să se arate că pentru orice $x \in (-1, \infty)$, $F'(x) = f(x)$.
 - Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^2}$.

SUBIECTUL III

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ și $C = aA + bB$, unde a, b sunt parametri reali.

- Să se calculeze determinantul matricei A și să se determine rangul ei.
- Să se demonstreze că $\text{rang}(aA + bB) = 3$ dacă și numai dacă $ab \neq 0$.
- Să se arate că $A^2 = -6A$ și $B^2 = 6B$.
- Să se arate că $AB = BA$.
- Să se demonstreze prin inducție că dacă matricea $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $X^2 = tX$, $t \in \mathbb{R}$, atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $X^n = t^{n-1}X$.
- Să se determine matricea C^n , $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcțiile $f, F : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^b}$ și $F(x) = \frac{1}{1-b}x^{1-b}$, $b \in \mathbb{R}$, $b > 1$. Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, definim șirul $a_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$.

- a) Să se arate că F este o primitivă a funcției f .
- b) Utilizând teorema lui Lagrange să se arate că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, există $c_k \in (k, k + 1)$ astfel încât $F(k + 1) - F(k) = f(c_k)$.
- c) Să se arate că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, au loc inegalitățile:

$$\frac{1}{(k + 1)^b} < F(k + 1) - F(k) < \frac{1}{k^b}.$$

- d) Să se arate că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este crescător.
- e) Utilizând rezultatul de la punctul c), să se demonstreze că $a_n < \frac{b}{b - 1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- f) Deduceți că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

Varianta 4

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + 1 + m$, unde m este un parametru real.
 - Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
 - Să se verifice că pentru orice $m \in \mathbb{R}$, avem $f(\sqrt{7} - 2) = f(-\sqrt{7} - 2)$.
- Se consideră mulțimea numerelor reale \mathbb{R} pe care se definește legea de compoziție $x \star y = x + y - 4$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că legea " \star " este asociativă.
 - Să se arate că $e = 4$ este elementul neutru al legii " \star ".
 - Să se verifice că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este adevărată relația $x \star (-x + 8) = 4$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(5, 6)$, $B(-1, -2)$ și $C(6, 5)$.
 - Să se calculeze lungimile segmentelor $[AB]$, $[BC]$ și $[AC]$.
 - Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.
 - Să se determine coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC .

SUBIECTUL II

- Se consideră polinomul $(1 - X + X^2)^{10}$ cu forma sa algebrică $f = a_{20}X^{20} + \dots + a_1X + a_0$.
 - Să se determine a_0 și a_1 .
 - Să se calculeze $f(1)$, $f(-1)$, $f(i)$.
 - Să se calculeze suma coeficienților polinomului f .
 - Să se arate că $a_0 + a_4 + \dots + a_{16} + a_{20} = \frac{1}{4}(f(1) + f(-1) + f(i) + f(-i))$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$.
 - Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.
 - Să se calculeze $\int_2^3 f(x) dx$.

SUBIECTUL III

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ și $C = aA + bB$, unde a, b sunt parametri reali.

- Să se calculeze determinantul matricei A și să se determine rangul ei.
- Să se demonstreze că $\text{rang}(aA + bB) = 3$ dacă și numai dacă $ab \neq 0$.
- Să se arate că $A^2 = 6A$ și $B^2 = -6B$.
- Să se arate că $AB = BA$.
- Să se demonstreze prin inducție că dacă matricea $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $X^2 = tX$, $t \in \mathbb{R}$, atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $X^n = t^{n-1}X$.
- Să se determine matricea C^n , $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcțiile $f, F : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \ln(1 + \ln x)$ și $f(x) = \frac{1}{x(1 + \ln x)}$. Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, definim șirul $a_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$.

- Să se arate că F este o primitivă a funcției f .

- b)** Utilizând teorema lui Lagrange să se arate că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, există $c_k \in (k, k+1)$ astfel încât $F(k+1) - F(k) = f(c_k)$.
- c)** Să se arate că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, au loc inegalitățile:

$$\frac{1}{(k+1)(1+\ln(k+1))} < F(k+1) - F(k) < \frac{1}{k(1+\ln k)}.$$

- d)** Să se arate că șirul $(a_n)_{n \geq 2}$ este crescător.
- e)** Utilizând rezultatul de la punctul **c)**, să se demonstreze că $a_n \geq F(n+1) - F(2)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
- f)** Deduceți că limita șirului $(a_n)_{n \geq 2}$ este $+\infty$.

Varianta 5

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 1 + m$, unde m este un parametru real.
 - Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
 - Să se verifice că pentru orice $m \in \mathbb{R}$, avem $f(\sqrt{5} - 1) = f(-\sqrt{5} - 1)$.
- Să se rezolve ecuația $\log_2(9^x + 7) = 2 + \log_2(3^x + 1)$.
- Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 \ln x$
 - Să se determine $f'(x)$ pentru orice $x \in (0, \infty)$.
 - Să se determine primitiva $F : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției f care are proprietatea $F(1) = 0$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuații: $d_1 : x + 2y - 3 = 0$, $d_2 : 2x + y - 3 = 0$ și $d_3 : 3x + 2y - 5 = 0$.
 - Să se determine punctul de intersecție al dreptelor d_1 și d_2 .
 - Să se arate că dreptele d_1 , d_2 și d_3 sunt concurente.
 - Să se scrie ecuația cercului de centru $O(0, 0)$ care trece prin punctul de concurență al celor trei drepte.

SUBIECTUL II

- Se consideră polinomul $f = X^3 + X^2 + aX + 1$, $a \in \mathbb{R}$ și $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile sale. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, definim $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$.
 - Să se arate că $S_3 + S_2 + aS_1 + 3 = 0$.
 - Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $S_3 = -1$.
- Se consideră funcțiile $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a \sin x + b \sin 3x + c \sin 5x$ și $F(x) = -a \cos x - \frac{b}{3} \cos 3x - \frac{c}{5} \cos 5x$.
 - Să se arate că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$.
 - Să se calculeze $F\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, pentru orice $k \in \mathbb{Z}$.
 - Să se arate că dacă $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, atunci F este identic zero.

SUBIECTUL III

- a) În mulțimea numerelor complexe \mathbb{C} , să se demonstreze că dacă $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, atunci

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \quad \overline{\overline{z_1}} = z_1.$$

Se notează cu \bar{z} conjugatul lui z .

Se consideră $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, mulțimea matricilor pătrate de ordin doi peste \mathbb{C} , și submulțimea

$$H = \left\{ A = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C} \right\}.$$

- Să se demonstreze că pentru orice $A, B \in H$, matricea $A \cdot B \in H$.
- Să se demonstreze că dacă $A \in H$ și are determinantul zero, atunci $A = O_2$.
- Să se arate că dacă $A \in H$ și $A \neq O_2$, atunci $A^{-1} \in H$.
- Să se găsească $A, B \in H$ având proprietatea $A \cdot B \neq B \cdot A$.

SUBIECTUL IV

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, se consideră funcția $f_n : \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{\sin^n x}{9 + \cos^2 x}$, și integrala $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f_n(x) dx$.

- a) Să se calculeze I_1 .
- b) Să se determine derivata $f'_n(x)$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- c) Să se arate că funcția f_n este crescătoare.
- d) Să se demonstreze că pentru $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ are loc relația $0 \leq f_n(x) \leq f_n\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- e) Să se arate că $0 \leq I_n \leq f_n\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \frac{\pi}{3}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- f) Să se determine limita șirului $(I_n)_{n \geq 1}$.

Varianta 6

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

- Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 8x + 1$ și $g(x) = -x^2 + 4x - 17$.
 - Să se arate că $f(x) - g(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze aria suprafeței plane limitate de graficele funcțiilor f și g , și dreptele de ecuații $x = -1$, $x = 0$.
- Se consideră mulțimea numerelor reale \mathbb{R} pe care se definește legea de compoziție $x \star y = x + y - 10$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că legea " \star " este comutativă.
 - Să se arate că legea " \star " este asociativă.
 - Să se arate că $e = 10$ este elementul neutru al legii " \star ".
 - Să se verifice că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este adevărată relația $x \star (-x + 20) = 10$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră cercul de ecuație $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 25$.
 - Să se determine coordonatele centrului și raza cercului.
 - Să se verifice că punctul $P(9, 7)$ este situat pe cerc.
 - Să se scrie ecuația tangentei la cerc în punctul $P(9, 7)$.

SUBIECTUL II

- Se consideră polinomul $(1 - 2X + X^2)^{10}$ cu forma sa algebrică $f = a_{20}X^{20} + \dots + a_1X + a_0$.
 - Să se determine a_0 și a_1 .
 - Să se calculeze $f(1)$, $f(-1)$, $f(i)$.
 - Să se calculeze suma coeficienților polinomului f .
 - Să se arate că $a_0 + a_4 + \dots + a_{16} + a_{20} = \frac{1}{4}(f(1) + f(-1) + f(i) + f(-i))$.
- Se consideră funcțiile $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a \cos x + b \cos 2x + c \cos 3x$ și $F(x) = a \sin x + \frac{b}{2} \sin 2x + \frac{c}{3} \sin 3x$.
 - Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f .
 - Să se calculeze $F(k\pi)$, pentru orice $k \in \mathbb{Z}$.
 - Să se arate că dacă $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, atunci F este identic zero.

SUBIECTUL III

- a) În mulțimea numerelor complexe \mathbb{C} , să se demonstreze că dacă $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, atunci

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \quad \overline{\overline{z_1}} = z_1.$$

Se notează cu \bar{z} conjugatul lui z .

Se consideră $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, mulțimea matricelor pătrate de ordin doi peste \mathbb{C} , și submulțimea

$$H = \left\{ A = \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C} \right\}.$$

- Să se demonstreze că pentru orice $A, B \in H$, matricea $A \cdot B \in H$.
- Să se demonstreze că dacă $A \in H$ și are determinantul zero, atunci $A = O_2$.
- Să se arate că dacă $A \in H$ și $A \neq O_2$, atunci $A^{-1} \in H$.
- Să se găsească $A, B \in H$ având proprietatea $A \cdot B \neq B \cdot A$.

SUBIECTUL IV

Se consideră $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x} dx$ și $I_k = \int_0^1 x^k \cdot \sqrt{1-x} dx, \forall k \in \mathbb{N}^*$.

- a) Să se calculeze I_0 .
- b) Să se demonstreze că pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, $I_k = \frac{2k}{2k+3} \cdot I_{k-1}$.
- c) Pentru $x \in [0, 1)$ se definește suma $S_n(x) = \sqrt{1-x} + x\sqrt{1-x} + \dots + x^{n-1}\sqrt{1-x}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

Varianta 7

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

- Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f = 2X^3 - 3X^2 - 17X + 30$.
 - Să se calculeze $f(2)$.
 - Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la $X - 2$.
 - Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.
- Să se rezolve ecuația $2e^{3x} - 3e^{2x} - 17e^x + 30 = 0$.
- Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\int_0^x (6t^2 - 6t - 17) dt + 30 = 0$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-3, 4)$, $B(5, -2)$ și C mijlocul segmentului $[AB]$.
 - Să se determine coordonatele punctului C și lungimea segmentului $[AB]$.
 - Să se scrie ecuația cercului de diametru $[AB]$.
 - Să se scrie ecuația tangentei la cercul de diametru $[AB]$ care trece prin punctul $D(4, 5)$.

SUBIECTUL II

- În mulțimea matricelor pătratice de ordinul trei peste \mathbb{C} , se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
 - Să se determine matricele A^2 și A^3 .
 - Să se arate că pentru orice $z \in \mathbb{C}$ determinantul matricei $I_3 + zA$ este egal cu 1.
 - Să se demonstreze că $I_3 = (I_3 + A)(I_3 - A + A^2)$.
 - Să se arate că matricea $I_3 + A$ este inversabilă și să se precizeze inversa sa.
- Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$, are loc identitatea:

$$x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - x}{x - 1}.$$

- Derivând ambii termeni ai identității de la punctul a), să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

SUBIECTUL III

Se consideră mulțimea numerelor reale \mathbb{R} pe care se definește legea de compoziție $x \star y = 2xy - 6x - 6y + 21$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

- Să se arate că legea " \star " este asociativă și comutativă.
- Să se determine elementul neutru al legii " \star ".
- Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc identitatea

$$\underbrace{x \star x \star \dots \star x}_{\text{de } n \text{ ori}} = 2^{n-1}(x-3)^n + 3, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$ și se definește șirul (I_n) astfel: $I_0 = \int_0^1 f(x) dx$ și $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

- a) Să se calculeze I_0 și I_1 .
- b) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} + 2I_{n+1} + 2I_n = \frac{1}{n+1}$.
- c) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \leq I_n$.
- d) Utilizând punctele b) și c) să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $5I_{n+2} \leq \frac{1}{n+1} \leq 5I_n$.
- e) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\frac{1}{5(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{5(n-1)}$.
- f) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = f(1)$.

Varianta 8

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

- Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f = 2X^3 - X^2 - 5X - 2$.
 - Să se calculeze $f(-1)$.
 - Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la $X + 1$.
 - Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.
- Să se rezolve ecuația $2(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 5 \ln x - 2 = 0$, $x > 0$.
- Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\int_0^x (6t^2 - 2t - 5) dt - 2 = 0$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-3, 4)$, $B(5, -4)$ și C mijlocul segmentului $[AB]$.
 - Să se determine coordonatele punctului C și lungimea segmentului $[AB]$.
 - Să se scrie ecuația cercului de diametru $[AB]$.
 - Să se scrie ecuația tangentei la cercul de diametru $[AB]$ care trece prin punctul $D(6, \sqrt{7})$.

SUBIECTUL II

- În $\mathbb{C}[X]$, mulțimea polinoamelor cu coeficienți complecși, se consideră polinomul $f = (X + i)^6 + (X - i)^6$, cu rădăcinile $x_1, x_2, \dots, x_6 \in \mathbb{C}$.
 - Să se calculeze $f(0)$.
 - Considerând forma algebrică a polinomului $f = a_6X^6 + a_5X^5 + \dots + a_1X + a_0$, determinați coeficienții a_6 , a_5 și a_4 .
 - Să se calculeze suma $S = x_1 + x_2 + \dots + x_6$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (1 + x)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
 - Să se arate că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \dots + C_n^nx^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
 - Derivând cele două expresii ale lui f să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc identitatea:

$$n(1 + x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2x + 3C_n^3x^2 + \dots + nC_n^nx^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

SUBIECTUL III

- Să se arate că $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y - x)(z - x)(z - y)$.
- Se consideră a, b, c, d numere reale distincte două câte două. Se definesc funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$ și $g(x) = x^2 + x + 1$.
 - Să se arate că $f'(x) = (a - b)(a - c)(a - d)$.
 - Să se demonstreze că $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ g(a) & g(b) & g(c) & g(d) \end{vmatrix} = 0$.
 - Dezvoltând determinantul Δ după ultima linie, deduceți identitatea

$$\frac{g(a)}{f'(a)} + \frac{g(b)}{f'(b)} + \frac{g(c)}{f'(c)} + \frac{g(d)}{f'(d)} = 0.$$

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 5}$ și se definește șirul (I_n) astfel: $I_0 = \int_0^1 f(x) dx$ și $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

- a) Să se calculeze I_0 și I_1 .
- b) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} + 4I_{n+1} + 5I_n = \frac{1}{n+1}$.
- c) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \leq I_n$.
- d) Utilizând punctele b) și c) să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $10I_{n+2} \leq \frac{1}{n+1} \leq 10I_n$.
- e) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\frac{1}{10(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{10(n-1)}$.
- f) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = f(1)$.

Varianta 9

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

- Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$.
 - Să se calculeze $f(1)$.
 - Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la $X - 1$.
 - Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.
- Să se rezolve ecuația $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - 5 \ln x + 6 = 0$, $x > 0$.
- Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\int_0^x (3t^2 - 4t - 5) dt + 6 = 0$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuații: $d_1 : 3x - 2y = 0$, $d_2 : x + 3y - 11 = 0$ și $d_3 : 2x - 3y + 5 = 0$.
 - Să se determine punctul de intersecție al dreptelor d_1 și d_2 .
 - Să se arate că dreptele d_1 , d_2 și d_3 sunt concurente.
 - Să se scrie ecuația cercului de centru $O(0, 0)$ care trece prin punctul de concurență al celor trei drepte.

SUBIECTUL II

- Se consideră polinomul $f = X^3 - X^2 + aX - 1$, $a \in \mathbb{R}$. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, definim $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, unde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului f .
 - Să se arate că $S_3 - S_2 + aS_1 - 3 = 0$.
 - Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $S_3 = 1$.
- Pentru orice $x \in [0, 1)$ se definește suma

$$S_n(x) = \sqrt{1-x} + x\sqrt{1-x} + \dots + x^{n-1}\sqrt{1-x}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sqrt{1-x} \cdot \frac{1-x^n}{1-x}$, $x \in [0, 1)$.
- Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$.
- Să se calculeze $\int_0^1 \sqrt{1-x} dx$.

SUBIECTUL III

În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, mulțimea matricelor pătratice de ordinul doi peste \mathbb{R} , se consideră matricea $X(a) = \begin{pmatrix} 1+5a & 10a \\ -2a & 1-4a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

- Să se calculeze determinantul matricei $X(a)$.
- Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, să se arate că $X(a) \cdot X(b) = X(ab + a + b)$.
Se consideră mulțimea $G = \{X(a) \mid a \in (-1, \infty)\}$.
- Să se demonstreze că G este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor.
- Să se determine $(X(1))^2$.
- Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $(X(1))^n = X(2^n - 1)$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$.

- a) Să se determine f' și f'' .
- b) Să se arate că $f'(x) > 0, \forall x \in (0, \infty)$ și $f'(x) < 0, \forall x \in (-\infty, 0)$.
- c) Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$.
- d) Pentru funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \cos x$, să se arate că aria suprafeței plane limitate de graficul funcției g , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0, x = 1$, este mai mare decât $\frac{5}{6}$.

Varianta 10

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

- Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f = 6X^3 - 5X^2 - 2X + 1$.
 - Să se calculeze $f(1)$.
 - Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la $X - 1$.
 - Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.
- Să se rezolve ecuația $6(\ln x)^3 - 5(\ln x)^2 - 2 \ln x + 1 = 0$, $x > 0$.
- Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\int_0^x (3t^2 - 4t - 5) dt + 6 = 0$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuații: $d_1 : x + 2y + 6 = 0$, $d_2 : 2x + y + 6 = 0$ și $d_3 : 3x + 2y + 10 = 0$.
 - Să se determine punctul de intersecție al dreptelor d_1 și d_2 .
 - Să se arate că dreptele d_1 , d_2 și d_3 sunt concurente.
 - Să se scrie ecuația cercului de centru $O(0, 0)$ care trece prin punctul de concurență al celor trei drepte.

SUBIECTUL II

- În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, mulțimea matricelor pătratice de ordinul doi peste \mathbb{R} , se consideră matricea $X(a) = \begin{pmatrix} 1 + 2a & a \\ -2a & 1 - a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, $X(a) \cdot X(b) = X(ab + a + b)$.
Se definește mulțimea $G = \{X(a) \mid a \in (-1, \infty)\}$.
 - Să se demonstreze că G este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor.
 - Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $(X(1))^n = X(2^n - 1)$.
- Se consideră funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + x5^x)$. Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ se definește $I_k = \int_0^1 \frac{5^k x}{1 + k5^k x^2} dx$.
 - Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{2x}$.
 - Să se calculeze I_k , $k \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL III

- Să se arate că $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y - x)(z - x)(z - y)$.
- Se consideră a, b, c numere reale distincte două câte două. Se definesc funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ și $g(x) = x^2 - 3x + 2$.
 - Să se arate că $f'(x) = (a - b)(a - c)$.
 - Să se demonstreze că $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ g(a) & g(b) & g(c) \end{vmatrix} = (b - a)(c - a)(c - b)$.
 - Dezvoltând determinantul Δ după ultima linie, deduceți identitatea

$$\frac{g(a)}{f'(a)} + \frac{g(b)}{f'(b)} + \frac{g(c)}{f'(c)} = 1.$$

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$.

- a) Să se determine f' și f'' .
- b) Să se arate că $f'(x) > 0$, $\forall x \in (0, \infty)$ și $f'(x) < 0$, $\forall x \in (-\infty, 0)$.
- c) Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
- d) Deduceți că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc inegalitatea $\cos(x^2) \geq 1 - \frac{x^4}{2}$.
- e) Pentru funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \cos(x^2)$, să se arate că aria suprafeței plane limitate de graficul funcției g , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$, $x = 1$, este mai mare decât $\frac{9}{10}$.

SESIUNEA IUNIE
Varianta 1

Profilul economic, fizică-chimie și chimie-biologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^5 + bx^2 + c$, unde a, b, c sunt parametri reali. Să se determine a, b și c astfel încât să fie îndeplinite simultan următoarele condiții:

$$f(0) = 1, f'(1) = 36, \int_0^1 f(x) dx = 3.$$

2. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

- a) Să se determine matricea A^2 .
b) Să se determine matricea $B = 6A^5 - 3A^2 + 6I_2$.
c) Să se calculeze determinantul matricei $B = 6A^5 - 3A^2 + 6I_2$.
3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(4, 5)$, $B(-2, -3)$ și $C(5, 4)$.
- a) Să se calculeze lungimile segmentelor $[AB]$, $[BC]$ și $[AC]$.
b) Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.
c) Să se determine coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC .

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 + aX - 5$, $a \in \mathbb{R}$. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, definim $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, unde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului f .

- a) Să se arate că $S_3 - 3S_2 + aS_1 - 15 = 0$.
b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $S_3 = -21$.

2. Se consideră $I(t) = \int_0^t (\cos x + 2 \sin x) dx$, $t \in (0, \infty)$.

- a) Să se determine $I(t)$, $t \in (0, \infty)$.
b) Să se calculeze $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(t)}{t}$.

SUBIECTUL III

Se consideră mulțimea numerelor reale \mathbb{R} pe care se definește legea de compoziție $x \star y = xy - 4x - 4y + 20$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

- a) Să se arate că legea este asociativă.
b) Să se determine $e \in \mathbb{R}$ astfel încât $x \star e = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Fie mulțimea $G = (4, \infty)$.
c) Să se arate că G este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea " \star ".
d) Să se rezolve în G ecuația $\underbrace{x \star x \star \dots \star x}_{\text{de 10 ori } x} = 5$.

SUBIECTUL IV

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 3}$, unde a, b, c parametri reali. Să se determine a, b și c astfel încât graficul funcției f să admită asimptota $y = x + 2$, iar punctul $A(1, 1)$ să se afle pe grafic.
2. Se consideră funcția $g : \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3}$.

- a) Să se stabilească intervalele de monotonie ale funcției g .
- b) Să se arate că $g(x) = x + 2 + \frac{4}{x-3}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.
- c) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $g^{(n)}(x) = (-1)^n (n!) \frac{4}{(x-3)^{n+1}}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Varianta 2

Profilul economic, fizică-chimie și chimie-biologie

SUBIECTUL I

- Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f = X^3 + 6X^2 + 11X + 6$.
 - Să se calculeze $f(-1)$.
 - Să se determine câtul și restul împărțirii lui f la $X + 1$.
 - Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.
- Să se rezolve ecuația $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 4$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(3, 4)$, $B(-3, -4)$ și $C(3, -4)$.
 - Să se calculeze lungimile segmentelor $[AB]$, $[BC]$ și $[AC]$.
 - Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.
 - Să se determine coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC .

SUBIECTUL II

- Se consideră mulțimea numerelor reale \mathbb{R} pe care se definește legea de compoziție $x \star y = 4xy - 4x - 4y + 5$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că legea " \star " este asociativă și comutativă.
 - Să se determine elementul neutru al legii " \star ".
 - Să se demonstreze că mulțimea $G = (1, \infty)$ este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea " \star ".
- Se consideră funcția $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 4x - 1 + \frac{1}{x-1}$.
 - Să se determine $g'(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
 - Să se stabilească asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției g .
 - Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$.

SUBIECTUL III

- Să se arate că $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y-z)(z-x)(z-y)$.
- Se consideră a, b, c numere reale distincte două câte două. Se definesc funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ și $g(x) = x^2 - 2x + 3$.
 - Să se arate că $f'(a) = (a-b)(a-c)$.
 - Să se demonstreze că $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ g(a) & g(b) & g(c) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.
 - Dezvoltând determinantul Δ după ultima linie deduceți identitatea

$$\frac{g(a)}{f'(a)} + \frac{g(b)}{f'(b)} + \frac{g(c)}{f'(c)} = 1.$$

SUBIECTUL IV

Se consideră integralele $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{4+x^2} dx$ și $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4+x^2} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- Să se calculeze I_0 și I_1 .

b) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ este adevărată relația

$$4I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}.$$

c) Să se arate că pentru orice $x \in [0, 1]$, $0 \leq \frac{x^n}{4+x^2} \leq x^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

d) Să se determine limita șirului $(nI_n)_{n \geq 1}$.

Varianta 3

Profilul economic, fizică-chimie și chimie-biologie

SUBIECTUL I

- Se consideră mulțimea numerelor reale \mathbb{R} pe care se definește legea de compoziție $x \star y = x + y + 4$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că legea " \star " este asociativă.
 - Să se arate că $e = -4$ este elementul neutru al legii " \star ".
 - Să se verifice că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este adevărată relația $x \star (-x - 8) = -4$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$.
 - Să se determine $f'(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se rezolve ecuația $f'(x) = 0$.
 - Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră cercul de ecuație $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 25$.
 - Să se determine coordonatele centrului și raza cercului.
 - Să se verifice că punctul $P(9, 7)$ este situat pe cerc.
 - Să se scrie ecuația tangentei la cerc în punctul $P(9, 7)$.

SUBIECTUL II

- În $\mathbb{C}[X]$, mulțimea polinoamelor cu coeficienți complecși, se consideră polinomul $f = (X + i)^7 + (X - i)^7$, cu rădăcinile $x_1, x_2, \dots, x_7 \in \mathbb{C}$.
 - Să se calculeze $f(0)$.
 - Considerând forma algebrică a polinomului $f = a_7X^7 + a_6X^6 + \dots + a_1X + a_0$, determinați coeficienții a_7 , a_6 și a_5 .
 - Să se calculeze suma $S = x_1 + x_2 + \dots + x_7$.
- Se consideră funcțiile $f, F : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1)^2 \ln(x + 1)$ și $F(x) = \frac{(x + 1)^3}{3} \ln(x + 1) - \frac{(x + 1)^3}{9} + \frac{1}{9}$.
 - Să se arate că F este o primitivă a funcției f .
 - Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^2}$.

SUBIECTUL III

În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, mulțimea matricelor pătratice de ordinul doi peste \mathbb{R} , se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

- Să se calculeze A^2 .
- Să se determine $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$, astfel încât determinantul matricei $X + A$ să fie egal cu 2.
- Să se demonstreze că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = A$.
- Să se demonstreze că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $A + 2A^2 + \dots + nA^n = \frac{n(n+1)}{2}A$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcțiile $f, F : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-\frac{3}{2}}$ și $F(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}}$.

Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, definim șirul $a_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$.

- a) Să se arate că F este o primitivă a funcției f .
- b) Utilizând teorema lui Lagrange să se arate că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, există $c_k \in (k, k + 1)$ astfel încât $F(k + 1) - F(k) = f(c_k)$.
- c) Să se arate că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, au loc inegalitățile:

$$(k + 1)^{\frac{3}{2}} < F(k + 1) - F(k) < k^{\frac{3}{2}}.$$

- d) Să se arate că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este crescător.
- e) Utilizând rezultatul de la punctul c), să se demonstreze că $a_n < 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.
- f) Deduceți că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

Varianta 4

Profilul economic, fizică-chimie și chimie-biologie

SUBIECTUL I

- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + 1 + m$, unde m este un parametru real.
 - Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
 - Să se verifice că pentru orice $m \in \mathbb{R}$, avem $f(\sqrt{7} - 2) = f(-\sqrt{7} - 2)$.
- Se consideră mulțimea numerelor reale \mathbb{R} pe care se definește legea de compoziție $x \star y = x + y - 4$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că legea " \star " este asociativă.
 - Să se arate că $e = 4$ este elementul neutru al legii " \star ".
 - Să se verifice că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este adevărată relația $x \star (-x + 8) = 4$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(5, 6)$, $B(-1, -2)$ și $C(6, 5)$.
 - Să se calculeze lungimile segmentelor $[AB]$, $[BC]$ și $[AC]$.
 - Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.
 - Să se determine coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC .

SUBIECTUL II

- Se consideră polinomul $f = (X + 1)^5 + (X - 1)^5$, cu rădăcinile $x_1, x_2, \dots, x_5 \in \mathbb{C}$.
 - Să se calculeze $f(0)$.
 - Considerând forma algebrică a polinomului $f = a_5X^5 + a_4X^4 + \dots + a_1X + a_0$, determinați coeficienții a_5 , a_4 și a_3 .
 - Să se calculeze suma $S = x_1 + x_2 + \dots + x_5$.
 - Să se calculeze suma $T = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_5^2$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$.
 - Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
 - Să se calculeze $\int_2^3 f(x) dx$.

SUBIECTUL III

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ și $C = A + B$.

- Să se calculeze determinantul matricei A .
- Să se demonstreze că $\text{rang}(A + B) = 3$.
- Să se arate că $A^2 = -6A$ și $B^2 = 6B$.
- Să se arate că $AB = BA$.
- Să se demonstreze prin inducție că dacă matricea $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $X^2 = tX$, $t \in \mathbb{R}$, atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $X^n = t^{n-1}X$.
- Să se determine matricea C^n , $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL IV

Pentru orice $x \in [0, 1)$ se definește suma

$$S_n(x) = \sqrt{2+x} + x\sqrt{2+x} + \dots + x^{n-1}\sqrt{2+x}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- a) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(x) = \sqrt{2+x} \cdot \frac{1-x^n}{1-x}$, $x \in [0, 1)$.
- b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$.
- c) Să se calculeze $\int_0^1 \sqrt{2+x} dx$.

Varianta 5

Profilul economic, fizică-chimie și chimie-biologie

SUBIECTUL I

- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 1 + m$, unde m este un parametru real.
 - Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
 - Să se verifice că pentru orice $m \in \mathbb{R}$, avem $f(\sqrt{5} - 2) = f(-\sqrt{5} - 2)$.
- Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 \ln x$.
 - Să se determine $f'(x)$ pentru orice $x \in (0, \infty)$.
 - Să se determine primitivele funcției f , $\int f(x) dx$, $x \in (0, \infty)$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuații $d_1 : x + 2y - 3 = 0$, $d_2 : 2x + y - 3 = 0$ și $d_3 : 3x + 2y - 5 = 0$.
 - Să se determine punctul de intersecție al dreptelor d_1 și d_2 .
 - Să se arate că dreptele d_1 , d_2 și d_3 sunt concurente.
 - Să se scrie ecuația cercului de centru $O(0, 0)$ care trece prin punctul de concurență al celor trei drepte.

SUBIECTUL II

- Se consideră polinomul $f = X^3 + X^2 + aX + 1$, $a \in \mathbb{R}$ care are rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, definim $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$.
 - Să se arate că $S_3 + S_2 + aS_1 + 3 = 0$.
 - Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $S_3 = -1$.
- Se consideră funcțiile $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a \sin x + b \sin 3x + c \sin 5x$ și $F(x) = -a \cos x - \frac{b}{3} \cos 3x - \frac{c}{5} \cos 5x$.
 - Să se arate că $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $F\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, pentru orice $k \in \mathbb{Z}$.
 - Să se calculeze $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} f(x) dx$.

SUBIECTUL III

- a) În mulțimea numerelor complexe \mathbb{C} , să se demonstreze că dacă $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, atunci

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$

Se notează cu \bar{z} conjugatul lui z .

Se consideră $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, mulțimea matricelor pătratice de ordin doi peste \mathbb{C} , și submulțimea

$$H = \left\{ A = \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C} \right\}.$$

- Să se demonstreze că pentru orice $A, B \in H$, matricea $A + B \in H$.
- Să se verifice că matricea $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ aparține mulțimii H .
- Să se arate că dacă $A \in H$, atunci $-A \in H$.
- Să se arate că submulțimea H a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, împreună cu operația de adunare indusă, formează o structură de grup comutativ.

f) Să se demonstreze că dacă $A \in H$ și are determinantul zero, atunci $A = O_2$.

SUBIECTUL IV

Se definește șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ astfel: $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x+3} dx$ și $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+3} dx$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

a) Să se calculeze I_0 și I_1 .

b) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $I_{n+1} + 3I_n = \frac{1}{n+1}$.

c) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $I_{n+1} \leq I_n$.

d) Utilizând punctele b) și c), să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, au loc inegalitățile:

$$4I_{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \leq 4I_n.$$

e) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, avem

$$\frac{1}{4(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{4n}.$$

f) Să se arate că limita șirului $(nI_n)_{n \geq 1}$ este egală cu $\frac{1}{4}$.

Varianta 6

Profilul economic, fizică-chimie și chimie-biologie

SUBIECTUL I

- Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 8x + 1$ și $g(x) = -x^2 + 4x - 17$.
 - Să se arate că $f(x) - g(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze aria suprafeței plane limitate de graficele funcțiilor f și g , și dreptele de ecuații $x = -1$, $x = 0$.
- Se consideră mulțimea numerelor reale \mathbb{R} pe care se definește legea de compoziție $x \star y = x + y - 10$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că legea " \star " este comutativă.
 - Să se arate că legea " \star " este asociativă.
 - Să se arate că $e = 10$ este elementul neutru al legii " \star ".
 - Să se verifice că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este adevărată relația $x \star (-x + 20) = 10$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră cercul de ecuație $(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 169$.
 - Să se determine coordonatele centrului și raza cercului.
 - Să se verifice că punctul $P(2, 7)$ este situat pe cerc.
 - Să se scrie ecuația tangentei la cerc în punctul $P(2, 7)$.

SUBIECTUL II

- Se consideră polinomul $f = (1 + X + X^2)^{10}$ cu forma sa algebrică $f = a_{20}X^{20} + \dots + a_1X + a_0$.
 - Să se determine a_0 și a_1 .
 - Să se calculeze $f(1)$, $f(-1)$ și $f(i)$.
 - Să se calculeze suma coeficienților polinomului f .
 - Să se arate că $a_0 + a_4 + \dots + a_{16} + a_{20} = \frac{1}{4}(f(1) + f(-1) + f(i) + f(-i))$.
- Se consideră funcțiile $f, F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a \cos x + b \cos 2x + c \cos 3x$ și $F(x) = a \sin x + \frac{b}{2} \sin 2x + \frac{c}{3} \sin 3x$.
 - Să se arate că F este o primitivă a funcției f .
 - Să se calculeze $F(k\pi)$, pentru orice $k \in \mathbb{Z}$.
 - Să se calculeze $\int_0^\pi f(x) dx$.

SUBIECTUL III

- Să se arate că
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y - z)(z - x)(z - y).$$
- Se consideră a, b, c numere reale distincte două câte două. Se definesc funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ și $g(x) = x^2 + x + 1$.
 - Să se arate că $f'(a) = (a - b)(a - c)$.
 - Să se demonstreze că
$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ g(a) & g(b) & g(c) \end{vmatrix} = (b - a)(c - a)(c - b).$$
 - Să se demonstreze identitatea
$$\frac{g(a)}{f'(a)} + \frac{g(b)}{f'(b)} + \frac{g(c)}{f'(c)} = 1.$$

SUBIECTUL IV

Pentru orice $x \in [0, 1)$ se definește suma

$$S_n(x) = \sqrt{1-x} + x\sqrt{1-x} + \dots + x^{n-1}\sqrt{1-x}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- a) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(x) = \sqrt{1-x} \cdot \frac{1-x^n}{1-x}$, $x \in [0, 1)$.
- b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$.
- c) Să se calculeze $\int_0^1 \sqrt{1-x} dx$.

Varianta 7

Profilul economic, fizică-chimie și chimie-biologie

SUBIECTUL I

- Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f = 2X^3 - 3X^2 - 17X + 30$.
 - Să se calculeze $f(2)$.
 - Să se determine câtul și restul împărțirii lui f la $X - 2$.
 - Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.
- Să se rezolve ecuația $2e^{3x} - 3e^{2x} - 17e^x + 30 = 0$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-3, 4)$, $B(5, -2)$ și C mijlocul segmentului $[AB]$.
 - Să se determine coordonatele punctului C și lungimea segmentului $[AB]$.
 - Să se scrie ecuația cercului de diametru $[AB]$.
 - Să se scrie ecuația tangentei la cercul de diametru $[AB]$ care trece prin punctul $D(4, 5)$.

SUBIECTUL II

- Se consideră sistemul
$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ x + y + 2z = -2 \\ mx - y + 3z = -1 \end{cases}$$
, unde m este un parametru real, și A matricea sistemului.

- Să se calculeze determinantul matricei A .
 - Să se determine valorile lui m pentru care sistemul este compatibil determinat.
 - Pentru $m = 4$ să se rezolve sistemul.
- Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$, are loc identitatea:

$$x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - x}{x - 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- Derivând ambii membri ai identității de la punctul a), să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$,

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

SUBIECTUL III

Se consideră mulțimea numerelor reale \mathbb{R} pe care se definește legea de compoziție $x \star y = 2xy - 6x - 6y + 21$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

- Să se arate că legea " \star " este asociativă și comutativă.
- Să se determine elementul neutru al legii " \star ".
- Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc identitatea:

$$\underbrace{x \star x \star x \star \dots \star x}_{\text{de } n \text{ ori } x} = 2^{n-1}(x-3)^n + 3, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

SUBIECTUL IV

Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$ și $g : \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{3x + 1}$.

- a) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$,

$$g^{(n)}(x) = (-1)^n n! \frac{3^n}{(3x+1)^{n+1}}.$$

- b) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

- c) Să se calculeze $\int_2^3 f(x) dx$.

Varianta 8

Profilul economic, fizică-chimie și chimie-biologie

SUBIECTUL I

- Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f = 2X^3 - X^2 - 5X - 2$.
 - Să se calculeze $f(-1)$.
 - Să se determine câtul și restul împărțirii lui f la $X + 1$.
 - Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.
- Să se rezolve ecuația $2(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 5 \ln x - 2 = 0$, $x > 0$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-3, 4)$, $B(5, -4)$ și C mijlocul segmentului $[AB]$.
 - Să se determine coordonatele punctului C și lungimea segmentului $[AB]$.
 - Să se scrie ecuația cercului de diametru $[AB]$.
 - Să se scrie ecuația tangentei la cercul de diametru $[AB]$ care trece prin punctul $D(6, \sqrt{7})$.

SUBIECTUL II

- Se consideră sistemul
$$\begin{cases} -x - 2y + 3z = 1 \\ 2x - y - z = 2 \\ mx - 3y + 2z = 3 \end{cases}$$
, unde m este un parametru real, și A matricea sistemului.
 - Să se calculeze determinantul matricei A .
 - Să se determine valorile lui m pentru care sistemul este compatibil determinat.
 - Pentru $m = 1$ să se rezolve sistemul.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (1 + x)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
 - Să se arate că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
 - Derivând cele două expresii ale lui f să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc identitatea

$$n(1 + x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + \dots + nC_n^n x^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

SUBIECTUL III

- În mulțimea numerelor complexe \mathbb{C} , să se demonstreze că dacă $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, atunci

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$

Se notează cu \bar{z} conjugatul lui z .

Se consideră $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, mulțimea matricelor pătrate de ordin doi peste \mathbb{C} , și submulțimea

$$H = \left\{ A = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C} \right\}.$$

- Să se demonstreze că pentru orice $A, B \in H$, matricea $A + B \in H$.
- Să se verifice că matricea $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ aparține mulțimii H .
- Să se arate că dacă $A \in H$, atunci $-A \in H$.
- Să se arate că submulțimea H a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, împreună cu operația de adunare indusă, formează o structură de grup comutativ.
- Să se demonstreze că dacă $A \in H$ și are determinantul zero, atunci $A = O_2$.

SUBIECTUL IV

Se definește șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ astfel: $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x+2} dx$ și $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+2} dx$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

- a) Să se calculeze I_0 și I_1 .
- b) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $I_{n+1} + 2I_n = \frac{1}{n+1}$.
- c) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $I_{n+1} \leq I_n$.
- d) Utilizând punctele b) și c), să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, au loc inegalitățile:

$$3I_{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \leq 3I_n.$$

- e) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, avem

$$\frac{1}{3(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{3n}.$$

- f) Să se arate că limita șirului $(nI_n)_{n \geq 1}$ este egală cu $\frac{1}{3}$.

Varianta 9

Profilul economic, fizică-chimie și chimie-biologie

SUBIECTUL I

- Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$.
 - Să se calculeze $f(1)$.
 - Să se determine câtul și restul împărțirii lui f la $X - 1$.
 - Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.
- Să se rezolve ecuația $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - 5 \ln x + 6 = 0$, $x > 0$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuații $d_1 : x + 2y - 6 = 0$, $d_2 : 2x + y - 6 = 0$ și $d_3 : 3x + 2y - 10 = 0$.
 - Să se determine punctul de intersecție al dreptelor d_1 și d_2 .
 - Să se arate că dreptele d_1 , d_2 și d_3 sunt concurente.
 - Să se scrie ecuația cercului de centru $O(0, 0)$ care trece prin punctul de concurență al celor trei drepte.

SUBIECTUL II

- Se consideră polinomul $f = X^3 - X^2 + aX - 1$, $a \in \mathbb{R}$ care are rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.
Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, definim $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$.
 - Să se arate că $S_3 - S_2 + aS_1 - 3 = 0$.
 - Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $S_3 = 1$.
- Se consideră funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + x5^x)$ și pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ se notează $I_k = \int_0^1 \frac{5^k x}{1 + k5^k x} dx$.
 - Să se arate calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{2x}$.
 - Să se calculeze I_k , $k \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL III

În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, mulțimea matricelor pătratice de ordin doi peste \mathbb{R} , se consideră matricea $X(a) = \begin{pmatrix} 1 + 5a & 10a \\ -2a & 1 - 4a \end{pmatrix}$,
 $a \in \mathbb{R}$.

- Să se calculeze determinantul matricei $X(a)$.
- Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, să se arate că $X(a) \cdot X(b) = X(ab + a + b)$.
- Să se determine $(X(1))^2$.
- Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(X(1))^n = X(2^n - 1).$$

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$.

- Să se determine f' și f'' .
- Să se arate că $f'(x) > 0$, $\forall x > 0$ și $f'(x) < 0$, $\forall x < 0$.
- Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f(x) \geq 0$.
- Pentru funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \cos x$, să se arate că aria suprafeței plane limitate de graficul funcției g , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$, $x = 1$, este mai mare decât $\frac{5}{6}$.

Varianta 10

Profilul economic, fizică-chimie și chimie-biologie

SUBIECTUL I

- Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f = 6X^3 - 5X^2 - 2X + 1$.
 - Să se calculeze $f(1)$.
 - Să se determine câtul și restul împărțirii lui f la $X - 1$.
 - Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.
- Să se rezolve ecuația $6(\ln x)^3 - 5(\ln x)^2 - 2 \ln x + 1 = 0$, $x > 0$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuații $d_1 : x + 2y + 6 = 0$, $d_2 : 2x + y + 6 = 0$ și $d_3 : 3x + 2y + 10 = 0$.
 - Să se determine punctul de intersecție al dreptelor d_1 și d_2 .
 - Să se arate că dreptele d_1 , d_2 și d_3 sunt concurente.
 - Să se scrie ecuația cercului de centru $O(0, 0)$ care trece prin punctul de concurență al celor trei drepte.

SUBIECTUL II

- Se consideră mulțimea numerelor reale \mathbb{R} pe care se definește legea de compoziție $x \star y = 3xy - 6x - 6y + 14$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că legea " \star " este asociativă și comutativă.
 - Să se determine elementul neutru al legii " \star ".
 - Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc identitatea:

$$\underbrace{x \star x \star x \star \dots \star x}_{\text{de } n \text{ ori } x} = 3^{n-1}(x-2)^n + 2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- Se consideră funcția $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)^2 \ln(x+1)$.
 - Să se stabilească primitiva funcției f , $F : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, care are proprietatea $F(1) = 0$.
 - Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x)}{x-1}$, unde F este primitiva determinată la punctul a).

SUBIECTUL III

În mulțimea matricelor pătratice de ordin trei peste \mathbb{R} , se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Să se determine matricele A^2 și A^3 .
- Să se arate că pentru orice $z \in \mathbb{C}$ determinantul matricei $I_3 + zA$ este egal cu 1.
- Să se demonstreze că $I_3 = (I_3 + A)(I_3 - A + A^2)$.
- Să se arate că matricea $I_3 + A$ este inversabilă și să se precizeze inversa.

SUBIECTUL IV

Se consideră integralele $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ și $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- Să se calculeze I_0 și I_1 .
- Să se arate că pentru orice $x \in [0, 1]$, $0 \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Să se demonstreze că $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Să se determine limita șirului $(nI_n)_{n \geq 1}$.

SESIUNEA IUNIE

Varianta 1

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv - real

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^5 + bx^2 + c$, unde a, b, c sunt parametri reali. Să se determine a, b și c astfel încât să fie îndeplinite simultan următoarele condiții: $f(0) = 1$, $f'(1) = 36$, $\int_0^1 f(x) dx = 3$.
2. Se consideră mulțimea numerelor reale \mathbb{R} pe care se definește legea de compoziție $x \star y = x + y + 5$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
 - a) Să se arate că legea " \star " este comutativă.
 - b) Să se arate că legea " \star " este asociativă.
 - c) Să se arate că $e = -5$ este elementul neutru al legii " \star ".
3. Să se rezolve în \mathbb{R} inecuația $x^2 - x - 2 > -x^2 + 2x + 3$.
4. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(4, 5)$, $B(-2, -3)$ și $C(5, 4)$.
 - a) Să se calculeze lungimile segmentelor $[AB]$, $[BC]$ și $[AC]$.
 - b) Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.
 - c) Să se determine coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC .

SUBIECTUL II

1. Să se rezolve ecuația $\log_2(9^x + 7) = 2 + \log_2(3^x + 1)$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.
 - a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
 - b) Să se determine $f'(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
 - c) Să se rezolve ecuația $f'(x) = 0$.
 - d) Să se stabilească intervalele de monotonie ale funcției f .

SUBIECTUL III

În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

- a) Să se calculeze A^2 .
- b) Să se determine matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$, astfel încât determinantul matricei $X + A$ să fie egal cu 2.
- c) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = A$.
- d) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $A + 2A^2 + \dots + nA^n = \frac{n(n+1)}{2}A$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - e^{-x}$.

- a) Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.
- b) Să se stabilească semnul funcției f .
- c) Să se calculeze aria suprafeței limitate de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = -1$, $x = 2$.
- d) Să se determine $f'(x)$ și $f''(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- e) Să se calculeze suma $S = f'(0) + f''(0) + \dots + f^{(100)}(0)$.

Varianta 2

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv - real

SUBIECTUL I

- Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f = X^3 + 6X^2 + 11X + 6$.
 - Să se calculeze $f(-1)$.
 - Să se determine câtul și restul împărțirii lui f la $X + 1$.
 - Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.
- Să se rezolve $C_n^2 = 6$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
- Se consideră funcția $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{6x^5 + 3x^2 + 1}{x^4}$. Să se stabilească asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției g .
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(3, 4)$, $B(-3, -4)$ și $C(3, -4)$.
 - Să se calculeze lungimile segmentelor $[AB]$, $[BC]$ și $[AC]$.
 - Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.
 - Să se determine coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC .

SUBIECTUL II

- Se consideră sistemul
$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -3 \\ 2x + y + z = 4 \\ mx - y + 4z = 1 \end{cases}$$
, unde m este un parametru real și A matricea sistemului.
 - Să se calculeze determinantul matricei A .
 - Să se determine valorile lui m pentru care sistemul este compatibil determinat.
 - Pentru $m = 3$ să se rezolve sistemul.
- Se consideră funcția $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 4x - 1 + \frac{1}{1-x}$.
 - Să se determine g' .
 - Să se stabilească intervalele de monotonie ale funcției g .
 - Să se demonstreze că $g^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

SUBIECTUL III

Se consideră mulțimea numerelor reale \mathbb{R} pe care se definește legea de compoziție $x \star y = 2xy - 6x - 6y + 21$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

- Să se arate că $x \star y = 2(x-3)(y-3) + 21$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
- Să se arate că legea " \star " este asociativă și comutativă.
- Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $\underbrace{x \star x \star \dots \star x}_{\text{de 10 ori } x} = 3$.

SUBIECTUL IV

Se definește șirul (I_n) astfel: $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x+5} dx$ și $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- Să se calculeze I_0 și I_1 .
- Să demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} + 5I_n = \frac{1}{n+1}$.
- Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} \leq I_n$.

Varianta 3

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv - real

SUBIECTUL I

- Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 5$ și $g(x) = -x^2 + 8x - 13$.
 - Să se arate că $f(x) - g(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze aria suprafeței plane limitate de graficele funcțiilor f și g , și dreptele de ecuații $x = -1$, $x = 0$.
- Se consideră mulțimea numerelor reale \mathbb{R} pe care se definește legea de compoziție $x \star y = x + y + 4$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că legea " \star " este asociativă.
 - Să se arate că $e = -4$ este elementul neutru al legii " \star ".
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră cercul de ecuație $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 25$.
 - Să se determine coordonatele centrului și raza cercului.
 - Să se verifice că punctul $P(9, 7)$ este situat pe cerc.
 - Să se scrie ecuația tangentei la cerc în punctul $P(9, 7)$.

SUBIECTUL II

- Se consideră polinomul $f = (X + i)^5 + (X - i)^5$, cu rădăcinile $x_1, x_2, \dots, x_5 \in \mathbb{C}$.
 - Să se calculeze $f(0)$.
 - Considerând forma algebrică a polinomului $f = a_5X^5 + a_4X^4 + \dots + a_1X + a_0$, determinați coeficienții a_5 , a_4 și a_3 .
 - Să se calculeze suma $S = x_1 + x_2 + \dots + x_5$.
- Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x}$.

SUBIECTUL III

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ și $C = A + B$.

- Să se calculeze determinantul matricei A .
- Să se demonstreze că $\text{rang}(A + B) = 3$.
- Să se arate că $A^2 = -6A$ și $B^2 = 6B$.
- Să se arate că $AB = BA$.
- Să se demonstreze prin inducție că dacă matricea $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $X^2 = tX$, $t \in \mathbb{R}$, atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $X^n = t^{n-1}X$.
- Să se calculeze matricea C^8 .

SUBIECTUL IV

Se consideră funcțiile $f, F: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1)^2 \ln(x + 1)$ și $F(x) = \frac{(x + 1)^3}{3} \ln(x + 1) - \frac{(x + 1)^3}{9} + \frac{1}{9}$.

- Să se arate că F este o primitivă a funcției f .
- Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^2}$.
- Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

Varianta 4

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv - real

SUBIECTUL I

- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + 1 + m$, unde m este un parametru real.
 - Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
 - Să se verifice că pentru orice $m \in \mathbb{R}$, avem $f(\sqrt{7} - 2) = f(-\sqrt{7} - 2)$.
- Se consideră mulțimea numerelor reale \mathbb{R} pe care se definește legea de compoziție $x \star y = x + y - 4$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că legea " \star " este asociativă.
 - Să se arate că $e = 4$ este elementul neutru al legii " \star ".
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(5, 6)$, $B(-1, -2)$ și $C(6, 5)$.
 - Să se calculeze lungimile segmentelor $[AB]$, $[BC]$ și $[AC]$.
 - Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.
 - Să se determine coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC .

SUBIECTUL II

- Se consideră polinomul $f = (X + 1)^5 + (X - 1)^5$, cu rădăcinile $x_1, x_2, \dots, x_5 \in \mathbb{C}$.
 - Să se calculeze $f(0)$.
 - Considerând forma algebrică a polinomului $f = a_5X^5 + a_4X^4 + \dots + a_1X + a_0$, determinați coeficienții a_5 și a_4 .
 - Să se calculeze suma $S = x_1 + x_2 + \dots + x_5$.
- Se consideră funcția $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 4x - 1 + \frac{1}{1-x}$.
 - Să se determine g' .
 - Să se stabilească semnul funcției g' și să se precizeze intervalele de monotonie ale funcției g .
 - Să se stabilească semnul funcției g .
 - Să se calculeze aria suprafeței plane limitate de graficul funcției g , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$, $x = \frac{3}{4}$.

SUBIECTUL III

În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

- Să se calculeze A^2 .
- Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = A$.
- Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $A + 2A^2 + \dots + nA^n = \frac{n(n+1)}{2}A$.

SUBIECTUL IV

Se definește șirul (I_n) astfel: $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$ și $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- Să se calculeze I_0 și I_1 .
- Să demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$.
- Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} \leq I_n$.

Varianta 5

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv - real

SUBIECTUL I

- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 1 + m$, unde m este un parametru real.
 - Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
 - Să se verifice că pentru orice $m \in \mathbb{R}$, avem $f(\sqrt{5} - 1) = f(-\sqrt{5} - 1)$.
- Să se rezolve ecuația $\log_2(9^x + 7) = 2 + \log_2(3^x + 1)$.
- Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 \ln x$.
 - Să se determine $f'(x)$ pentru orice $x \in (0, \infty)$.
 - Să se rezolve ecuația $f'(x) = 0$, $x \in (0, \infty)$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuații $d_1 : x + 2y - 3 = 0$, $d_2 : 2x + y - 3 = 0$ și $d_3 : 3x + 2y - 5 = 0$.
 - Să se determine punctul de intersecție al dreptelor d_1 și d_2 .
 - Să se arate că dreptele d_1 , d_2 și d_3 sunt concurente.
 - Să se scrie ecuația cercului de centru $O(0, 0)$ care trece prin punctul de concurență al celor trei drepte.

SUBIECTUL II

- Se consideră polinomul $f = X^3 + X^2 + aX + 1$, $a \in \mathbb{R}$, care are rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, definim $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$.
 - Să se arate că $S_3 + S_2 + aS_1 + 3 = 0$.
 - Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $S_3 = -1$.
 - Să se arate că pentru orice $a \in \mathbb{Z}$ număr par, polinomul f nu are rădăcini raționale.
- Se consideră funcțiile $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a \sin x + b \sin 3x + c \sin 5x$ și $F(x) = -a \cos x - \frac{b}{3} \cos 3x - \frac{c}{5} \cos 5x$.
 - Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f .
 - Să se calculeze $\int_0^{2\pi} f(x) dx$.

SUBIECTUL III

- a) În mulțimea numerelor complexe \mathbb{C} , să se demonstreze că dacă $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, atunci

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$

Se notează cu \bar{z} conjugatul lui z .

Se consideră $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, mulțimea matricelor pătratiche de ordin doi peste \mathbb{C} , și submulțimea

$$H = \left\{ A = \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C} \right\}.$$

- Să se demonstreze că pentru orice $A, B \in H$, avem $A + B \in H$.
- Să se arate că dacă $A \in H$, atunci $-A \in H$.
- Să se demonstreze că dacă $A \in H$ și are determinantul zero, atunci $A = O_2$.

SUBIECTUL IV

Se definește șirul (I_n) astfel: $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x+3} dx$ și $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+3} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- Să se calculeze I_0 și I_1 .
- Să demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} + 3I_n = \frac{1}{n+1}$.
- Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} \leq I_n$.

Varianta 6

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv - real

SUBIECTUL I

- Se consideră funcția $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 8x + 1$ și $g(x) = -x^2 + 4x - 17$.
 - Să se arate că $f(x) - g(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze aria suprafeței plane limitate de graficele funcțiilor f și g , și dreptele de ecuații $x = -1$, $x = 0$.
- Se consideră mulțimea numerelor reale \mathbb{R} pe care se definește legea de compoziție $x \star y = x + y - 10$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că legea " \star " este comutativă.
 - Să se arate că legea " \star " este asociativă.
 - Să se arate că $e = 10$ este elementul neutru al legii " \star ".
 - Să se verifice că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este adevărată relația $x \star (-x + 20) = 10$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră cercul de ecuație $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 25$.
 - Să se determine coordonatele centrului și raza cercului.
 - Să se verifice că punctul $P(9, 7)$ este situat pe cerc.
 - Să se scrie ecuația tangentei la cerc în punctul $P(9, 7)$.

SUBIECTUL II

- Se consideră polinomul $f = (1 + X + X^2)^{10}$ cu forma sa algebrică $f = a_{20}X^{20} + \dots + a_1X + a_0$.
 - Să se determine a_0 și a_1 .
 - Să se calculeze $f(1)$, $f(-1)$ și $f(i)$.
 - Să se calculeze suma coeficienților polinomului f .
 - Să se arate că $a_0 + a_4 + \dots + a_{16} + a_{20} = \frac{1}{4}(f(1) + f(-1) + f(i) + f(-i))$.
- Se consideră funcțiile $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a \cos x + b \cos 2x + c \cos 3x$ și $F(x) = a \sin x + \frac{b}{2} \sin 2x + \frac{c}{3} \sin 3x$.
 - Să se arate că F este o primitivă a funcției f .
 - Să se calculeze $F(k\pi)$, pentru orice $k \in \mathbb{Z}$.
 - Să se calculeze $\int_0^\pi f(x) dx$.

SUBIECTUL III

- a) În mulțimea numerelor complexe \mathbb{C} , să se demonstreze că dacă $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, atunci

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$

Se notează cu \bar{z} conjugatul lui z .

Se consideră $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, mulțimea matricelor pătratice de ordin doi peste \mathbb{C} , și submulțimea

$$H = \left\{ A = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C} \right\}.$$

- Să se demonstreze că pentru orice $A, B \in H$, matricea $A + B \in H$.
- Să se verifice că matricea $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ aparține mulțimii H .
- Să se arate că dacă $A \in H$, atunci $-A \in H$.

- e) Să se arate că submulțimea H a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, împreună cu operația de adunare indusă, formează o structură de grup comutativ.
- f) Să se demonstreze că dacă $A \in H$ și are determinantul zero, atunci $A = O_2$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{6x^5 + 3x^2 + 1}{x^4}$.

1. Să se arate că dreapta $x = 0$ este asimptotă verticală.
2. Să se stabilească asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției g .

Varianta 7

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv - real

SUBIECTUL I

- Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f = 2X^3 - 3X^2 - 17X + 30$.
 - Să se calculeze $f(2)$.
 - Să se determine câtul și restul împărțirii lui f la $X - 2$.
 - Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.
- Să se rezolve ecuația $2e^{3x} - 3e^{2x} - 17e^x + 30 = 0$.
- Se consideră funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^4 - 2x^3 - 17x^2 + 60x - 10$. Să se stabilească semnul funcției g' .
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-3, 4)$, $B(5, -2)$ și C mijlocul segmentului $[AB]$.
 - Să se determine coordonatele punctului C și lungimea segmentului $[AB]$.
 - Să se scrie ecuația cercului de diametru $[AB]$.
 - Să se verifice dacă punctul $D(4, 5)$ este situat pe cercul de diametru $[AB]$.

SUBIECTUL II

- Se consideră sistemul
$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ x + y + 2z = -2 \\ mx - y + 3z = -1 \end{cases}$$
, unde m este un parametru real, și A matricea sistemului.

- Să se calculeze determinantul matricei A .
- Să se determine valorile lui m pentru care sistemul este compatibil determinat.
- Pentru $m = 4$ să se rezolve sistemul.

- Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$, are loc identitatea:

$$x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - x}{x - 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- Derivând ambii membri ai identității de la punctul a), să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$,

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

SUBIECTUL III

Se consideră mulțimea numerelor reale \mathbb{R} pe care se definește legea de compoziție $x \star y = 2xy - 6x - 6y + 21$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

- Să se arate că legea " \star " este asociativă și comutativă.
- Să se determine elementul neutru al legii " \star ".
- Să se demonstreze că mulțimea $G = (3, \infty)$ este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea " \star ".

SUBIECTUL IV

Se consideră integralele $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{4+x^2} dx$ și $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4+x^2} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- Să se calculeze I_0 și I_1 .
- Să se arate că pentru orice $x \in [0, 1]$, $\frac{x^n}{4+x^2} \leq x^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Să se demonstreze că $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Să se determine limita șirului $(I_n)_{n \geq 1}$.

Varianta 8

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv - real

SUBIECTUL I

- Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f = 2X^3 - X^2 - 5X - 2$.
 - Să se calculeze $f(-1)$.
 - Să se determine câtul și restul împărțirii lui f la $X + 1$.
 - Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.
- Să se rezolve ecuația $2(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 5 \ln x - 2 = 0$, $x > 0$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-3, 4)$, $B(5, -4)$ și C mijlocul segmentului $[AB]$.
 - Să se determine coordonatele punctului C și lungimea segmentului $[AB]$.
 - Să se scrie ecuația cercului de diametru $[AB]$.
 - Să se verifice dacă punctul $D(6, \sqrt{7})$ este situat pe cercul de diametru $[AB]$.

SUBIECTUL II

- Se consideră sistemul
$$\begin{cases} -x - 2y + 3z = 1 \\ 2x - y - z = 2 \\ mx - 3y + 2z = 3 \end{cases}$$
, unde m este un parametru real, și A matricea sistemului.
 - Să se calculeze determinantul matricei A .
 - Să se determine valorile lui m pentru care sistemul este compatibil determinat.
 - Pentru $m = 1$ să se rezolve sistemul.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (1 + x)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
 - Să se arate că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
 - Derivând cele două expresii ale lui f să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc identitatea
$$n(1 + x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + \dots + nC_n^n x^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

SUBIECTUL III

Se consideră mulțimea numerelor reale \mathbb{R} pe care se definește legea de compoziție $x \star y = xy + x + y$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

- Să se calculeze $7 \star 5$.
- Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $x \star x = 0$.
- Să se arate că $x \star y = y \star x$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
- Să se determine $e \in \mathbb{R}$ astfel încât $x \star e = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- Să se demonstreze că mulțimea $G = (-1, \infty)$ este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea " \star ".

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$.

- Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- Să se determine $f'(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- Să se rezolve ecuația $f'(x) = 0$.
- Să se arate că $f(x) = \frac{1}{x + 1} + x + 2$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- Să se calculeze $\int_0^3 f(x) dx$.

Varianta 9

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv - real

SUBIECTUL I

- Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$.
 - Să se calculeze $f(1)$.
 - Să se determine câtul și restul împărțirii lui f la $X - 1$.
 - Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.
- Să se rezolve ecuația $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - 5 \ln x + 6 = 0$, $x > 0$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuații $d_1 : x + 2y - 6 = 0$, $d_2 : 2x + y - 6 = 0$ și $d_3 : 3x + 2y - 10 = 0$.
 - Să se determine punctul de intersecție al dreptelor d_1 și d_2 .
 - Să se arate că dreptele d_1 , d_2 și d_3 sunt concurente.
 - Să se scrie ecuația cercului de centru $O(0, 0)$ care trece prin punctul de concurență al celor trei drepte.

SUBIECTUL II

- Se consideră polinomul $f = X^3 - X^2 + aX - 1$, $a \in \mathbb{R}$ care are rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, definim $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$.
 - Să se arate că $S_3 - S_2 + aS_1 - 3 = 0$.
 - Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $S_3 = 1$.
- Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x(1 + \ln x)$.
 - Să se determine $f'(x)$ pentru orice $x \in (0, \infty)$.
 - Să se calculeze $\int_1^4 f(x) dx$.

SUBIECTUL III

În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, mulțimea matricelor pătratice de ordin doi peste \mathbb{R} , se consideră matricea $X(a) = \begin{pmatrix} 1 + 5a & 10a \\ -2a & 1 - 4a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

- Să se calculeze determinantul matricei $X(a)$.
- Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, să se arate că $X(a) \cdot X(b) = X(ab + a + b)$.
- Să se determine $(X(1))^2$.
- Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(X(1))^n = X(2^n - 1).$$

SUBIECTUL IV

Se consideră funcțiile $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 1)e^x$ și $F(x) = (x - 2)e^x + e$.

- Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f .
- Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x)}{(x - 1)^2}$.
- Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{xe^x}$.

Varianta 10

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv - real

SUBIECTUL I

- Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f = 6X^3 - 5X^2 - 2X + 1$.
 - Să se calculeze $f(1)$.
 - Să se determine câtul și restul împărțirii lui f la $X - 1$.
 - Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.
- Să se rezolve ecuația $6(\ln x)^3 - 5(\ln x)^2 - 2 \ln x + 1 = 0$, $x > 0$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuații $d_1 : x + 2y + 6 = 0$, $d_2 : 2x + y + 6 = 0$ și $d_3 : 3x + 2y + 10 = 0$.
 - Să se determine punctul de intersecție al dreptelor d_1 și d_2 .
 - Să se arate că dreptele d_1 , d_2 și d_3 sunt concurente.
 - Să se scrie ecuația cercului de centru $O(0, 0)$ care trece prin punctul de concurență al celor trei drepte.

SUBIECTUL II

- Se consideră mulțimea numerelor reale \mathbb{R} pe care se definește legea de compoziție $x \star y = 3xy - 6x - 6y + 14$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că legea " \star " este asociativă și comutativă.
 - Să se determine elementul neutru al legii " \star ".
 - Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc identitatea:

$$\underbrace{x \star x \star x \star \dots \star x}_{\text{de } n \text{ ori } x} = 3^{n-1}(x-2)^n + 2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- Se consideră funcțiile $f, F : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)^2 \ln(x+1)$ și $F(x) = \frac{(x+1)^3}{3} \ln(x+1) - \frac{(x+1)^3}{9} + \frac{1}{9}$.
 - Să se calculeze $F(0)$.
 - Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f .
 - Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^2}$.

SUBIECTUL III

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ se definește matricea $B_n = A + A^2 + A^3 + \dots + A^n$.

- Să se determine A^2 și A^3 .
- Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Să se determine matricea B_n , $n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL IV

Se consideră integralele $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{4-x^2} dx$ și $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- Să se calculeze I_0 și I_1 .
- Să se arate că pentru orice $x \in [0, 1]$, $0 \leq \frac{x^n}{4-x^2} \leq x^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Să se demonstreze că $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

SESIUNEA IUNIE
Varianta 1

Profil pedagogic

SUBIECTUL I

1. Să se determine toate numerele scrise în baza 10 de forma \overline{abc} , divizibile cu 45, știind că a este cifră pară.
2. Un elev are o sumă de bani. După ce dublează această sumă, cheltuiește 150000 de lei. Apoi dublează suma rămasă și mai cheltuiește încă 200000 lei. După ce dublează noul rest și cheltuiește încă 250000 lei, constată că i-au rămas 100000 de lei.
 - a) Care este suma inițială pe care a avut-o elevul?
 - b) Care este suma pe care a avut-o elevul înainte de a cheltui 250000 de lei?

SUBIECTUL II

1. Se consideră binomul la putere $(x - 2y)^8$, $x, y \in \mathbb{R}$.
 - a) Să se calculeze suma coeficienților dezvoltării binomului.
 - b) Să se determine termenul din mijloc al dezvoltării.
2. În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, mulțimea matricelor pătratice de ordinul doi peste \mathbb{R} , se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.
 - a) Să se calculeze A^2 .
 - b) Să se determine $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ astfel încât determinantul matricei $X + A$ să fie egal cu 2.
 - c) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = A$.
 - d) Să se demonstreze că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A + 2A^2 + \dots + nA^n = \frac{n(n+1)}{2}A.$$

SUBIECTUL III

Se consideră mulțimea numerelor reale \mathbb{R} pe care se definește legea de compoziție $x \star y = 3xy - 6x - 6y + 14$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

- a) Să se arate că legea " \star " este asociativă și comutativă.
- b) Să se determine elementul neutru al legii " \star ".
- c) Să se demonstreze că mulțimea $G = (2, \infty)$ este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea " \star ".
- d) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc identitatea:

$$\underbrace{x \star x \star x \star \dots \star x}_{\text{de } n \text{ ori } x} = 3^{n-1}(x - 2)^n + 2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

SUBIECTUL IV

Se consideră tetraedrul regulat $ABCD$ de muchie $2\sqrt{3}$ cm.

- a) Să se calculeze volumul tetraedrului.
- b) Să se demonstreze că dreptele AB și CD sunt perpendiculare.

Varianta 2

Profil pedagogic

SUBIECTUL I

1. Numerele 294, 499 și 361 împărțite la același număr natural n dau resturile 14, 9, respectiv 11. Să se determine numărul natural n .
2. În două magazine se află depozitate porumb și orez.
 - a) Cantitățile de porumb din cele două magazine sunt direct proporționale cu numerele 7 și 11, iar în prima magazie sunt cu 840 t mai puțin decât în a doua. Care este cantitatea de porumb din a doua magazie?
 - b) 20% din cantitatea de orez depozitată în prima magazie este egală cu 60% din cantitatea de orez din a doua magazie. După ce se scot 400 t de orez din fiecare magazie, în prima magazie rămâne de 4 ori mai mult orez decât în a doua. Ce cantitate de orez a fost depozitată inițial în fiecare magazie?

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f = X^3 + 2X^2 - 5X - 6$.
 - a) Să se calculeze $f(-1)$.
 - b) Să se determine câtul și restul împărțirii lui f la $X + 1$.
 - c) Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.
2. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ mx + y - 2z = 3 \end{cases}$$
, unde m este un parametru real și A matricea sistemului.
 - a) Să se calculeze determinantul matricei A .
 - b) Să se determine valorile lui m pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.

SUBIECTUL III

Se consideră mulțimea numerelor reale \mathbb{R} și submulțimea sa

$$G = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 2b^2 = 1\}.$$

- a) Să se demonstreze că dacă $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ și $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$, atunci $a = c$ și $b = d$.
- b) Să se demonstreze că G este parte stabilă a lui \mathbb{R} față de operația de înmulțire a numerelor reale.
- c) Să se arate că dacă $x = a + b\sqrt{2}$ și $x \in G$, atunci $x \neq 0$ și $\frac{1}{x} \in G$.

SUBIECTUL IV

Se consideră triunghiul echilateral ABC cu $AB = 3$ cm și dreapta AM perpendiculară pe planul (ABC) astfel încât $AM = \sqrt{6}$ cm. Pe laturile $[AB]$ și $[AC]$ se fixează punctele E și F astfel încât $AE = 2BE$, respectiv $CF = 2AF$.

- a) Să se calculeze perimetrul triunghiului AEF .
- b) Să se demonstreze că planele (EFM) și (AFM) sunt perpendiculare.

Varianta 3

Profil pedagogic

SUBIECTUL I

1. Să se determine toate numerele naturale scrise în baza 10, de forma $\overline{27xy}$, divizibile cu 45.
2. Barbu are 57 de ani, vârsta lui Dan este media aritmetică a vârstelor lui Barbu și Ion, iar Ion are 13 ani.
 - a) Ce vârstă are Dan?
 - b) Cu câți ani în urmă vârsta lui Barbu a fost de 12 ori mai mare decât vârsta lui Dan?
 - c) Peste câți ani vârstele lui Barbu, Dan și Ion vor fi direct proporționale cu numerele 7, 5 și respectiv 3?

SUBIECTUL II

1. Să se rezolve ecuațiile:
 - a) $C_n^3 = 10$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$;
 - b) $\log_2(x+2) + \log_2 x = 3$, $x \in (0, +\infty)$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 + X^2 + aX + 1$, $a \in \mathbb{R}$.
Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, definim $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, unde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului f .
 - a) Să se arate că $S_3 + S_2 + aS_1 + 3 = 0$.
 - b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $S_3 = -1$.

SUBIECTUL III

În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, mulțimea matricelor pătratice de ordin doi peste \mathbb{R} , se consideră matricea $X(a) = \begin{pmatrix} 1-a & -2a \\ a & 1+2a \end{pmatrix}$,
 $a \in \mathbb{R}$.

- a) Să se calculeze determinantul matricei $X(a)$.
- b) Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, să se arate că $X(a) \cdot X(b) = X(ab + a + b)$.
- c) Să se determine $(X(1))^2$.
- d) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(X(1))^n = X(2^n - 1).$$

SUBIECTUL IV

Se consideră trapezul $ABCD$ cu proprietatea $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle D) = 90^\circ$, $AB = 4$ cm, $AD = 8$ cm și $DC = 10$ cm. În punctul B se ridică perpendiculara BP pe planul (ABC) astfel încât $BP = 3$ cm.

- a) Să se calculeze perimetrul trapezului.
- b) Să se calculeze volumul piramidei $PABCD$.

Varianta 4

Profil pedagogic

SUBIECTUL I

1. Să se demonstreze că numărul $10^{2000} + 9998$ este divizibil cu 18.
2. În prima lună prețul unui produs a crescut cu 12%. În a doua lună prețul produsului a scăzut cu 25%. S-a constatat că față de prețul inițial produsul costă cu 100000 lei mai puțin. Care a fost prețul inițial al produsului?

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f = 2X^3 - X^2 - 5X - 2$.
 - a) Să se arate calculeze $f(2)$.
 - b) Să se determine câtul și restul împărțirii lui f la $X - 2$.
 - c) Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.
2. Să se rezolve ecuațiile:
 - a) $C_n^2 = 6, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$;
 - b) $2e^{3x} + 5e^{2x} + e^x - 2 = 0, x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III

În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, mulțimea matricelor pătratice de ordin doi peste \mathbb{R} , se consideră matricea $X(a) = \begin{pmatrix} 1+2a & a \\ -2a & 1-a \end{pmatrix}$,
 $a \in \mathbb{R}$.

- a) Să se calculeze determinantul matricei $X(a)$.
- b) Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, să se arate că $X(a) \cdot X(b) = X(ab + a + b)$.
- c) Să se determine $(X(1))^2$.
- d) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(X(1))^n = X(2^n - 1).$$

SUBIECTUL IV

Se consideră $VABCD$ o piramidă în care baza $ABCD$ este romb de latură a cm, $m(\sphericalangle BAD) = m(\sphericalangle BVD) = 60^\circ$, O punctul de intersecție al diagonalelor rombului, iar dreapta VO este perpendiculară pe planul (ABC) .

- a) Să se calculeze perimetrul triunghiului BCD .
- b) Să se calculeze volumul piramidei $VABCD$.

Varianta 5

Profil pedagogic

SUBIECTUL I

1. Să se determine $x \in \mathbb{Z}$, $x \neq -2$, astfel încât fracția $\frac{3x-4}{x+2}$ să reprezinte un număr natural.
2. Într-o curte sunt găini și iepuri, în total 35 capete.
 - a) Numărul total de picioare poate fi 68?
 - b) Dacă numărul total de picioare este 90, să se determine numărul de iepuri.
 - c) Dacă numărul de găini este cuprins între 18 și 26, să se determine între ce valori este cuprins numărul total de picioare.

SUBIECTUL II

Se consideră polinomul $f = (X+3)^4 + (X-3)^4$, cu rădăcinile $x_1, x_2, \dots, x_4 \in \mathbb{C}$.

- a) Să se calculeze $f(0)$.
- b) Considerând forma algebrică a polinomului $f = a_4X^4 + a_3X^3 + \dots + a_1X + a_0$, determinați coeficienții a_4, a_3 și a_2 .
- c) Să se calculeze suma $S = x_1 + x_2 + \dots + x_4$.
- d) Să se calculeze suma $T = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_4^2$.

SUBIECTUL III

În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, mulțimea matricelor pătratice de ordin doi peste \mathbb{R} , se consideră matricea $X(a) = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ -2a & 1+2a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

- a) Să se calculeze determinantul matricei $X(a)$.
- b) Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, să se arate că $X(a) \cdot X(b) = X(ab + a + b)$.
- c) Să se determine $(X(1))^2$.
- d) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(X(1))^n = X(2^n - 1).$$

SUBIECTUL IV

Se consideră $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu baza $ABCD$, iar O este centrul bazei. Latura bazei este de lungime 6 cm, iar înălțimea piramidei VO este de lungime $6\sqrt{2}$ cm.

- a) Să se calculeze aria totală a piramidei.
- b) Se fixează punctul P pe VO astfel încât $[PV] \equiv [PA]$. Să se calculeze lungimea segmentului $[PO]$.

Varianta 6

Profil pedagogic

SUBIECTUL I

1. Fie $0, a_1 a_2 a_3 \dots$ scrierea zecimală a numărului $\frac{1}{7}$. Să se determine a_{2004} .
2. Mergând pe jos 6 ore, călătorind cu autobuzul 3 ore și cu trenul 2 ore un excursionist parcurge 528 km. Viteza cu care merge pe jos este de 14 ori mai mică decât viteza autobuzului și de 20 de ori mai mică decât viteza trenului.
 - a) Care este viteza cu care merge pe jos excursionistul?
 - b) Care este distanța pe care o parcurge cu autobuzul?
 - c) Care este distanța pe care o parcurge cu trenul?

SUBIECTUL II

1. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -3 \\ 2x + y + z = 4 \\ mx - y + 4z = 1 \end{cases}$$
, unde m este un parametru real, și A matricea sistemului.
 - a) Să se calculeze determinantul matricei A .
 - b) Să se determine valorile lui m pentru care sistemul este compatibil determinat.
 - c) Pentru $m = 3$ să se rezolve sistemul.
2. Să se rezolve ecuațiile:
 - a) $4^{2x} + 7 \cdot 4^x - 16 \cdot 4^{-x} - 10 = 0, x \in \mathbb{R}$.
 - b) $(n - 3)! = 24, n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.

SUBIECTUL III

Se consideră mulțimea numerelor reale \mathbb{R} și submulțimea sa

$$G = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 5b^2 = 1\}.$$

- a) Să se demonstreze că dacă $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ și $a + b\sqrt{5} = c + d\sqrt{5}$, atunci $a = c$ și $b = d$.
- b) Să se demonstreze că G este parte stabilă a lui \mathbb{R} față de operația de înmulțire a numerelor reale.
- c) Să se arate că dacă $x = a + b\sqrt{5}$ și $x \in G$, atunci $x \neq 0$ și $\frac{1}{x} \in G$.

SUBIECTUL IV

Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ în care diagonala AC' este de lungime 13 cm și suma tuturor muchiilor este de 76 cm.

- a) Să se calculeze aria totală a paralelipipedului.
- b) Dacă lungimile AB, BC și AA' sunt respectiv proporționale cu 6, 8 și 24 să se determine distanța de la B' la AD' .

Varianta 7

Profil pedagogic

SUBIECTUL I

1. Să se determine numerele naturale x și y a căror sumă este 88, iar cel mai mare divizor comun al lor este 11.
2. Într-o curte sunt găini și iepuri, în total 35 de capete.
 - a) Dacă numărul total de picioare este 90, să se determine numărul de iepuri.
 - b) După ce au fost aduși 6 iepuri numărul total de picioare este de 104. Să se determine numărul de găini din curte.
 - c) Dacă numărul de găini este cuprins între 18 și 26, să se determine între ce valori este cuprins numărul total de picioare.

SUBIECTUL II

Se consideră polinomul $f = (X + 1)^5 + (X - 1)^5$, cu rădăcinile $x_1, x_2, \dots, x_5 \in \mathbb{C}$.

- a) Să se calculeze $f(0)$.
- b) Considerând forma algebrică a polinomului $f = a_5X^5 + a_4X^4 + \dots + a_1X + a_0$, determinați coeficienții a_5, a_4 și a_3 .
- c) Să se calculeze suma $S = x_1 + x_2 + \dots + x_5$.
- d) Să se calculeze suma $T = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_5^2$.

SUBIECTUL III

În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, mulțimea matricelor pătratice de ordin doi peste \mathbb{R} , se consideră matricea $X(a) = \begin{pmatrix} 1 + 3a & 6a \\ -a & 1 - 2a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

- a) Să se calculeze determinantul matricei $X(a)$.
- b) Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, să se arate că $X(a) \cdot X(b) = X(ab + a + b)$.
- c) Să se determine $(X(1))^2$.
- d) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(X(1))^n = X(2^n - 1).$$

SUBIECTUL IV

Se consideră prisma dreaptă $ABCD A' B' C' D'$ în care $ABCD$ este pătrat de latură a , iar muchia laterală AA' este de lungime $2a$. Se notează cu E mijlocul muchiei CC' .

1. Să se calculeze aria totală a prisme.
2. Să se demonstreze că triunghiul $A'EB$ este dreptunghic.

Varianta 8

Profil pedagogic

SUBIECTUL I

1. Să se determine $x \in \mathbb{Z}$, $x \neq -2$, astfel încât fracția $\frac{3x-4}{x+2}$ să reprezinte un număr natural.
2. Un cub omogen are muchia de 2 dm și cântărește 560 g. Din acest cub se tai un cub cu muchia de 1 dm. Cât cântărește acest cub?
3. Să se determine cel mai mic număr natural de trei cifre care împărțit la 3, 4 și 5 să dea de fiecare dată restul 1.

SUBIECTUL II

1. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 1 \\ 3x - y + z = 3 \\ mx + 2y - z = 4 \end{cases}$$
, unde m este un parametru real, și A matricea sistemului.
 - a) Să se calculeze determinantul matricei A .
 - b) Să se determine valorile lui m pentru care sistemul este compatibil determinat.
 - c) Pentru $m = 4$ să se rezolve sistemul.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 + aX - 5$, $a \in \mathbb{R}$.
Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, definim $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, unde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului f .
 - a) Să se arate că $S_3 - 3S_2 + aS_1 - 15 = 0$.
 - b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $S_3 = -21$.

SUBIECTUL III

Se consideră mulțimea numerelor reale \mathbb{R} pe care se definește legea de compoziție $x \star y = 2xy - 6x - 6y + 21$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

- a) Să se arate că legea " \star " este asociativă și comutativă.
- b) Să se determine elementul neutru al legii " \star ".
- c) Să se demonstreze că mulțimea $G = (3, \infty)$ este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea " \star ".
- d) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc identitatea:

$$\underbrace{x \star x \star x \star \dots \star x}_{\text{de } n \text{ ori } x} = 2^{n-1}(x-3)^n + 3, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

SUBIECTUL IV

Se consideră $SABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu baza $ABCD$, iar O este centrul bazei. Latura bazei are lungimea egală cu 2 cm, iar muchia laterală are lungimea egală cu $\sqrt{6}$ cm.

- a) Să se calculeze volumul piramidei.
- b) Să se calculeze aria laterală a piramidei.

Varianta 9

Profil pedagogic

SUBIECTUL I

1. Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, numărul $A = 5^{n-1} \cdot 2^n + 5^n \cdot 2^{n-1}$ este divizibil cu 70.
2. La prima ediție a unui cros au participat mai puțin de 1000 de sportivi, la a doua ediție au participat cu 15% mai mulți sportivi decât la prima ediție, iar la a treia ediție au participat cu 8% mai puțini decât la a doua ediție. Câți sportivi au participat la fiecare din cele trei ediții?

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f = 5X^3 + 14X^2 + 7X - 2$.
 - a) Să se arate calculeze $f(-2)$.
 - b) Să se determine câtul și restul împărțirii lui f la $X + 2$.
 - c) Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.
2. Să se rezolve ecuațiile:
 - a) $e^{3x} - 2e^{2x} - 13e^x - 10 = 0$, $x \in \mathbb{R}$.
 - b) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 64$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

SUBIECTUL III

În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, mulțimea matricelor pătratice de ordin doi peste \mathbb{R} , se consideră matricea $X(a) = \begin{pmatrix} 1 - 3a & 6a \\ -2a & 1 + 4a \end{pmatrix}$,
 $a \in \mathbb{R}$.

- a) Să se calculeze determinantul matricei $X(a)$.
- b) Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, să se arate că $X(a) \cdot X(b) = X(ab + a + b)$.
- c) Să se determine $(X(1))^2$.
- d) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(X(1))^n = X(2^n - 1).$$

SUBIECTUL IV

Se consideră tetraedrul regulat $ABCD$ de muchie 6 cm, O punctul de intersecție al mediatoarelor triunghiului BCD .

- a) Să se calculeze volumul tetraedrului $ABCD$.
- b) Se fixează punctul H pe segmentul $[AO]$ situat la distanță egală de toate fețele tetraedrului. Să se determine distanța dintre punctele H și A .

Varianta 10

Profil pedagogic

SUBIECTUL I

1. Să se determine cel mai mic număr natural divizibil cu 9, format din cinci cifre distincte.
2. O echipă formată din 6 lucrători are de efectuat o lucrare. Lucrând individual oricare dintre doi angajați ar putea efectua lucrarea în 36 ore, și oricare dintre următorii 4 ar putea efectua lucrarea în 72 ore.
 - a) În cât timp ar efectua lucrarea primii doi angajați, dacă ar lucra împreună?
 - b) În cât timp ar efectua lucrarea ultimii patru angajați, dacă ar lucra împreună?
 - c) În cât timp execută lucrarea întreaga echipă?

SUBIECTUL II

1. Se consideră fracția $\frac{x^2 + (m+3)x + m + 11}{x^2 + 2x + m + 5}$, $m \in \mathbb{R}$.
 - a) Să se determine m astfel încât fracția să aibă sens pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
 - b) Să se determine m astfel încât fracția să fie strict pozitivă pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
2. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 2 \\ 3x - 2y + z = -1 \\ mx - y - 2z = 1 \end{cases}$$
, unde m este un parametru real, și A matricea sistemului.
 - a) Să se calculeze determinantul matricei A .
 - b) Să se determine valorile lui m pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.

SUBIECTUL III

Se consideră mulțimea numerelor reale \mathbb{R} pe care se definește legea de compoziție $x \star y = xy - 4x - 4y + 20$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

- a) Să se calculeze $7 \star 5$.
- b) Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $x \star x = 20$.
- c) Să se arate că $x \star y = y \star x$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
- d) Să se determine $e \in \mathbb{R}$ astfel încât $x \star e = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- e) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc identitatea

$$\underbrace{x \star x \star \dots \star x}_{\text{de } n \text{ ori } x} = (x - 4)^n + 4, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

SUBIECTUL IV

Se consideră un trunchi de con circular drept în care secțiunea axială este trapezul $ABCD$ în care $AC \perp BD$, $AB = 10$ cm și $CD = 6$ cm.

- a) Să se calculeze aria trapezului $ABCD$.
- b) Să se calculeze volumul trunchiului de con.

SESIUNEA IUNIE
Varianta 1

Profil uman

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^5 + bx^2 + c$, a, b, c parametri reali. Să se determine a, b și c astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile

$$f(0) = 1, \quad f'(1) = 36, \quad \int_0^1 f(x) dx = 3.$$

2. Se consideră polinomul $g = X^3 + X - 2$.
- Să se afle câtul și restul împărțirii polinomului la $X - 1$.
 - Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $g(x) = 0$.
3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuații $d_1 : 3x - y - 2 = 0$, $d_2 : x - y = 0$.
- Să se determine coordonatele punctului de intersecție al celor două drepte.
 - Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctul $A(1, 1)$ și are panta 2.

SUBIECTUL II

În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, mulțimea matricelor pătratice de ordin doi peste \mathbb{R} , se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

- Să se calculeze A^2 .
- Să se determine $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix}$, astfel încât determinantul matricii $X + A$ să fie egal cu 2.
- Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = A$.

SUBIECTUL III

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 7}{x - 3}$.

- Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- Să se determine $f'(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.
- Să se arate că $f(x) = \frac{4}{x - 3} + x - 1$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.
- Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

SUBIECTUL IV

Se consideră mulțimea numerelor reale \mathbb{R} pe care se definește legea de compoziție $x \star y = 4xy - 4x - 4y + 5$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

- Să se arate că legea " \star " este asociativă și comutativă.
- Să se determine elementul neutru al legii " \star ".
- Să se demonstreze că mulțimea $G = (1, +\infty)$ este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea " \star ".

Varianta 2

Profil uman

SUBIECTUL I

- Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f = X^3 + aX^2 + bX + 6$, $a, b \in \mathbb{R}$.
 - Să se determine a și b astfel încât $f(1) = 0$ și $f(-2) + 30 = 0$.
 - Pentru $a = -2$ și $b = -5$ să se afle câtul și restul împărțirii lui f la $X^2 + 1$.
 - Pentru $a = -2$ și $b = -5$ să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.
- Să se rezolve ecuația $4^{2x} - 2 \cdot 4^x + 6 \cdot 4^{-x} - 5 = 0$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-3, 3)$, $B(5, -3)$ și C mijlocul segmentului $[AB]$.
 - Să se determine panta dreptei AB .
 - Să se scrie ecuația dreptei care trece prin C și are panta $\frac{4}{3}$.

SUBIECTUL II

Se consideră matricea $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

- Să se arate că $B^2 = 5B$.
- Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $B^n = 5^{n-1}B$.
- Să se determine matricea $A = B + B^2 + \dots + B^{100}$.

SUBIECTUL III

- Se consideră funcțiile $f, F : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 \ln x$ și $F(x) = \frac{x^4}{4} \left(\ln x - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{16}$.
 - Să se calculeze $F(1)$.
 - Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f .
 - Să se calculeze $\int_1^e f(x) dx$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2}$.
Să se determine $f'(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$.

SUBIECTUL IV

Se consideră mulțimea numerelor reale \mathbb{R} pe care se definește legea de compoziție $x \star y = 2xy - 6x - 6y + 21$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

- Să se arate că legea " \star " este asociativă și comutativă.
- Să se determine elementul neutru al legii " \star ".
- Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc identitatea

$$\underbrace{x \star x \star \dots \star x}_{\text{de } n \text{ ori } x} = 2^{n-1}(x-3)^n + 3, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Varianta 3

Profil uman

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^7 + bx^3 + c$, a, b, c parametri reali. Să se determine a, b și c astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile

$$f(0) = 1, \quad f'(1) = 38, \quad \int_0^1 f(x) dx = 3.$$

2. Să se rezolve ecuația $\lg(3x^2 + 12x + 19) - \lg(3x + 4) = 1$, $x \in (0, \infty)$.
3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-3, 3)$, $B(5, -3)$ și C mijlocul segmentului $[AB]$.
- a) Să se determine coordonatele punctului C și lungimea segmentului $[AB]$.
- b) Să se scrie ecuația cercului de diametru $[AB]$.

SUBIECTUL II

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Să se determine $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ astfel încât $A \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.
- b) Să se determine A^2 și A^3 .
- c) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcția $f : (-\infty, 5) - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 7x + 10}$.

- a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.
- b) Să se determine $f'(x)$, $x \in (-\infty, 5) - \{2\}$.
2. Să se calculeze $\int_1^e (x \ln x - x) dx$.

SUBIECTUL IV

Se consideră polinomul $f = (X + 1)^5 + (X - 1)^5$, cu rădăcinile $x_1, x_2, \dots, x_5 \in \mathbb{C}$.

- a) Să se calculeze $f(0)$.
- b) Considerând forma algebrică a polinomului $f = a_5 X^5 + a_4 X^4 + \dots + a_1 X + a_0$, determinați coeficienții a_5, a_4 și a_3 .
- c) Să se calculeze suma $S = x_1 + x_2 + \dots + x_5$.
- d) Să se calculeze suma $T = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_5^2$.

Varianta 4

Profil uman

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^5 + bx^2 + c$, a, b, c parametri reali. Să se determine a, b și c astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile

$$f(0) = 1, \quad f'(1) = 7, \quad f''(0) = 2.$$

2. Se consideră polinomul $g = 4X^3 + 3X^2 + 1$.
- Să se calculeze $g(-1)$.
 - Să se afle câtul și restul împărțirii polinomului g la $X^2 - 1$.
3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuații $d_1 : 3x + y + 2 = 0$, $d_2 : x + y = 0$.
- Să se determine coordonatele punctului de intersecție al celor două drepte.
 - Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctul $A(2, 3)$ și are panta 2.

SUBIECTUL II

În mulțimea matricelor pătratice de ordin doi peste \mathbb{R} se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Să se calculeze A^2 .
- Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Să se determine matricea $A + A^2 + \dots + A^{10}$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcția $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{8x^7 + 4x^3 + 1}{x^7}$.
- Să se arate că dreapta $x = 0$ este asimptotă verticală la graficul funcției g .
 - Să se stabilească asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției g .
2. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x(1 - \ln x)$.
- Să se determine $f'(x)$ pentru orice $x \in (0, \infty)$.
 - Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

SUBIECTUL IV

Se consideră mulțimea numerelor reale \mathbb{R} pe care se definește legea de compoziție $x \star y = x + y - 2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

- Să se arate că legea " \star " este comutativă.
- Să se arate că legea " \star " este asociativă.
- Să se arate că $e = 2$ este elementul neutru al legii " \star ".
- Să se verifice că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este adevărată relația $x \star (-x + 4) = 2$.
- Să se rezolve ecuația $\underbrace{x \star x \star \dots \star x}_{\text{de 100 ori } x} = -98$.

Varianta 5

Profil uman

SUBIECTUL I

- Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f = X^3 + mX^2 + nX + 9$, $m, n \in \mathbb{R}$.
 - Să se determine m și n astfel încât $f(1) = 0$ și $f(2) + 21 = 0$.
 - Să se determine câtul și restul împărțirii lui f la $X^2 - 1$.
 - Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $f(x) = 0$.
- Să se rezolve ecuația $3^x - 4 + 3 \cdot 3^{-x} = 0$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-4, 4)$, $B(4, -2)$ și C mijlocul segmentului $[AB]$.
 - Să se determine coordonatele punctului C .
 - Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctele A și B .

SUBIECTUL II

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Să se calculeze A^2 .
- Să se determine matricea $B = A + 2A^2 + \dots + 100A^{100}$.
- Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât determinantul matricei $A + xI_2$ să fie egal cu zero.

SUBIECTUL III

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1)e^x$.

- Să se determine $f'(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- Să se stabilească semnul funcției f' .
- Să se precizeze intervalele de monotonie ale funcției f și să se arate că $x_0 = -2$ este punct de minim al lui f .
- Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

SUBIECTUL IV

Se consideră mulțimea numerelor reale \mathbb{R} pe care se definește legea de compoziție $x \star y = xy + 4x + 4y + 12$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

- Să se calculeze $7 \star (-2)$.
- Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $x \star x = 12$.
- Să se arate că $x \star \frac{-4x - 15}{x + 4} = -3$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$.
- Să se determine $e \in \mathbb{R}$ astfel încât $x \star e = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- Să se demonstreze că mulțimea $G = (-4, \infty)$ este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea " \star ".

Varianta 6

Profil uman

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, a, b, c parametri reali. Să se determine a, b și c astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile

$$f(0) = 1, \quad f'(1) = 18, \quad \int_0^1 f(x) dx = 3.$$

2. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- a) Să se calculeze A^2 .
- b) Să se determine matricea $B = 4A^3 + 3A^2 + I_2$.
3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuații $d_1 : 3x - 8y - 3 = 0$ și $d_2 : 5x + 2y - 5 = 0$.
- a) Să se determine coordonatele punctului de intersecție al celor două drepte.
- b) Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctul $A(1, 2)$ și are panta 3.

SUBIECTUL II

Se consideră polinomul $f = X^2 + X + 1$ care are rădăcinile $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$.

- a) Să se calculeze $x_1 + x_2$.
- b) Să se arate că $x_1^3 = x_2^3 = 1$.
- c) Să se calculeze $x_1^{10} + x_2^{10}$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^x$.
- a) Să se determine derivata f' .
- b) Să se rezolve ecuația $f'(x) = 0$.
- c) Să se demonstreze că există $c \in (-2, 0)$ astfel încât $f''(c) = 0$.
2. Se definește șirul (I_n) astfel:

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx \text{ și } I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1.$$

- a) Să se calculeze I_0 și I_1 .
- b) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$.

SUBIECTUL IV

În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, mulțimea matricelor pătratice de ordin doi peste \mathbb{R} , se consideră matricea $X(a) = \begin{pmatrix} 1+2a & a \\ -2a & 1-a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

- a) Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, să se arate că $X(a) \cdot X(b) = X(ab + a + b)$.
- b) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(X(1))^n = X(2^n - 1).$$

Varianta 7

Profil uman

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^4 + bx + c$, a, b, c parametri reali. Să se determine a, b și c astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile

$$f(0) = 1, \quad f'(1) = 22, \quad \int_0^1 f(x) dx = 3.$$

2. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- a) Să se calculeze A^2 .
- b) Să se determine matricea $B = 5A^4 + 2A + I_2$.
3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuații $d_1 : 5x - 2y + 2 = 0$ și $d_2 : 2x + 3y - 3 = 0$.
- a) Să se determine coordonatele punctului de intersecție al celor două drepte.
- b) Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctul $A(2, 1)$ și are panta 5.

SUBIECTUL II

Se consideră polinomul $f = X^2 - X + 1$ care are rădăcinile $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$.

- a) Să se calculeze $x_1 + x_2$.
- b) Să se arate că $x_1^3 = x_2^3 = -1$.
- c) Să se calculeze $x_1^{10} + x_2^{10}$.

SUBIECTUL III

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 2}$.

- a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- b) Să se determine $f'(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$.
- c) Să se arate că $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$.
- d) Să se calculeze $\int_0^3 f(x) dx$.

SUBIECTUL IV

În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, mulțimea matricelor pătratice de ordin doi peste \mathbb{R} , se consideră matricea $X(a) = \begin{pmatrix} 1 - 3a & 6a \\ -2a & 1 + 4a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

- a) Să se calculeze determinantul matricei $X(a)$.
- b) Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, să se arate că $X(a) \cdot X(b) = X(ab + a + b)$.
- c) Să se determine $(X(1))^2$.
- d) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(X(1))^n = X(2^n - 1).$$

Varianta 8

Profil uman

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^7 + bx^3 + c$, a, b, c parametri reali. Să se determine a, b și c astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile

$$f(0) = 1, \quad f'(1) = 7, \quad f''(1) = 42.$$

2. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- a) Să se calculeze A^2 .
- b) Să se determine matricea $B = 8A^7 + 4A^3 + I_2$.
3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuații $d_1 : 2x + y - 3 = 0$ și $d_2 : 3x + y - 4 = 0$.
- a) Să se determine coordonatele punctului de intersecție al celor două drepte.
- b) Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctul $A(1, 1)$ și are panta 5.

SUBIECTUL II

1. Să se rezolve ecuațiile:
- a) $C_n^2 = 10$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
- b) $\log_2(x+2) + \log_2 x = 3$, $x \in (0, \infty)$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 + X^2 + aX + 1$, $a \in \mathbb{R}$. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ definim $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, unde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului f . Să se arate că $S_3 + S_2 + aS_1 + 3 = 0$.

SUBIECTUL III

Se consideră funcția $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{6x^5 + 3x^2 + 1}{x^5}$.

- a) Să se arate că dreapta $x = 0$ este asimptotă verticală la graficul funcției g .
- b) Să se stabilească asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției g .
- c) Să se determine derivata g' .
- d) Să se calculeze $\int_1^2 g(x) dx$.

SUBIECTUL IV

Se consideră mulțimea numerelor reale \mathbb{R} pe care se definește legea de compoziție $x \star y = x + y + 3$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

- a) Să se arate că legea " \star " este comutativă.
- b) Să se arate că legea " \star " este asociativă.
- c) Să se arate că $e = -3$ este elementul neutru al legii " \star ".
- d) Să se verifice că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este adevărată relația $x \star (-x - 6) = -3$.
- e) Să se rezolve ecuația $\underbrace{x \star x \star \dots \star x}_{\text{de 100 ori } x} = 397$.

Varianta 9

Profil uman

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^5 + bx^4 + c$, a, b, c parametri reali. Să se determine a, b și c astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile

$$f(0) = -1, \quad f'(1) = 50, \quad \int_0^1 f(x) dx = 1.$$

2. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- a) Să se calculeze A^2 .
- b) Să se determine matricea $B = 6A^5 + 5A^4 - I_2$.
3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuații $d_1 : 2x + 3y = 0$ și $d_2 : 5x + 8y = 0$.
- a) Să se determine coordonatele punctului de intersecție al celor două drepte.
- b) Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctul $A(1, 1)$ și are panta 3.

SUBIECTUL II

Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f = 2X^3 - X^2 - 5X - 2$.

- a) Să se calculeze $f(2)$.
- b) Să se determine câtul și restul împărțirii lui f la $X - 2$.
- c) Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.
- d) Să se rezolve ecuația $C_n^2 = 6$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

SUBIECTUL III

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$.

- a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- b) Să se determine $f'(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- c) Să se rezolve ecuația $f'(x) = 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- d) Să se arate că $f(x) = \frac{1}{x+1} + x + 2$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- e) Să se calculeze $\int_0^3 g(x) dx$.

SUBIECTUL IV

Se consideră mulțimea numerelor reale \mathbb{R} pe care se definește legea de compoziție $x \star y = x + y - 4$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

- a) Să se arate că legea " \star " este comutativă.
- b) Să se arate că legea " \star " este asociativă.
- c) Să se arate că $e = -4$ este elementul neutru al legii " \star ".
- d) Să se verifice că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este adevărată relația $x \star (-x + 8) = 4$.
- e) Să se rezolve ecuația $\underbrace{x \star x \star \dots \star x}_{\text{de 100 ori } x} = 4$.

Varianta 10

Profil uman

SUBIECTUL I

- Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$.
 - Să se calculeze $f(2)$.
 - Să se determine câtul și restul împărțirii lui f la $X - 1$.
 - Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.
- Să se rezolve ecuația $3^{2x} - 6 \cdot 3^x - 6 \cdot 3^{-x} = -11$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuații $d_1 : 3x - 2y - 1 = 0$ și $d_2 : 2x - 3y + 1 = 0$.
 - Să se determine coordonatele punctului de intersecție al celor două drepte.
 - Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctul $A(1, 1)$ și are panta -3 .

SUBIECTUL II

Se consideră matricea $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

- Să se arate că $B^2 = -2B$.
- Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $B^n = (-2)^{n-1}B$.
- Să se calculeze determinantul matricei B^n .

SUBIECTUL III

- Se consideră funcția $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{5x^4 + 2x + 1}{x^4}$.
 - Să se arate că dreapta $x = 0$ este asimptotă verticală la graficul funcției g .
 - Să se stabilească asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției g .
 - Să se determine derivata $g'(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Se definește șirul (I_n) astfel:
$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x+10} dx \text{ și } I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+10} dx, n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$
 - Să se calculeze I_0 și I_1 .
 - Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} + 10I_n = \frac{1}{n+1}$.

SUBIECTUL IV

Se consideră mulțimea numerelor reale \mathbb{R} pe care se definește legea de compoziție $x \star y = xy - 4x - 4y + 20$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

- Să se arate că legea " \star " este asociativă.
- Să se arate că $x \star \frac{4x-15}{x-4} = 5, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.
- Să se determine $e \in \mathbb{R}$ astfel încât $x \star e = x, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\underbrace{x \star x \star \dots \star x}_{\text{de } n \text{ ori } x} = (x-4)^n + 4.$$

SESIUNEA AUGUST
Varianta 1

Profilurile matematică-fizică, informatică și metrologie

SUBIECTUL I

1. a) Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se determine a, b, c astfel încât $f(0) = 2$, $f'(1) = 1$ și $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$.
- b) Să se rezolve ecuația $3 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 9^x = 0$, $x \in \mathbb{R}$.
2. Să se determine toate numerele naturale n pentru care $C_n^2 < 10$.
3. Se consideră șirurile $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$ definite prin:

$$a_n = n + 2 \text{ și } b_n = 3n - 2, n \in \mathbb{N}^*.$$

- a) Să se arate că cele două șiruri sunt progresii aritmetice și să se determine rația fiecăreia. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(a_n, b_n)$, $n \geq 1$.
- b) Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctele A_1 și A_2 .
- c) Să se demonstreze că punctele $A_n(a_n, b_n)$ sunt situate pe dreapta A_1A_2 , $\forall n \geq 1$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinoamele $f = X^9 + X^8 + \dots + X + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, \dots, x_9 \in \mathbb{C}$ și $g = X^2 + X + 1$ cu rădăcinile $y_1, y_2 \in \mathbb{C}$.
 - a) Să se arate că $y_1^3 = y_2^3 = 1$.
 - b) Să se arate că polinomul f divide polinomul $X^{10} - 1$.
 - c) Să se deducă identitatea $x_k^{10} = 1$, $\forall k \in \{1, 2, \dots, 9\}$.
 - d) Să se calculeze valoarea expresiei

$$A = (x_1 - y_1)(x_2 - y_1) \dots (x_9 - y_1)(x_1 - y_2)(x_2 - y_2) \dots (x_9 - y_2).$$

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 1}$.
 - a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - b) Să se studieze monotonia funcției f .
 - c) Să se determine asimptota oblică la ramura către $+\infty$ a graficului funcției f .

SUBIECTUL III

În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 2b^2 = 1 \right\}$.

- a) Să se arate că $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.
- b) Să se demonstreze că G este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor.
- c) Să se arate că dacă $A \in G$, atunci $A^{-1} \in G$.
- d) Să se găsească o matrice $A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$ cu $b \neq 0$.
- e) Să se arate că mulțimea G conține o infinitate de elemente.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 6^x + \alpha^x - 14^x - 15^x$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.

- a) Să se calculeze $f'(x)$.
- b) Să se calculeze $f(0)$ și $f'(0)$.
- c) Să se determine α astfel încât $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Considerăm $\alpha = 35$.
- d) Să se calculeze aria cuprinsă între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.
- e) Să se demonstreze că dacă $0 < a < b < c < d$ și $a + d = b + c$, atunci $a^n + d^n > b^n + c^n, \forall n \geq 2$.
- f) Deduceți că $f^{(n)}(0) > 0, \forall n \geq 2$.

Varianta 2

Profilurile matematică-fizică, informatică și metrologie

SUBIECTUL I

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 9 + m$, unde m este un parametru real.
 - a) Să se determine valorile lui m pentru care $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
 - b) Să se determine punctul de minim și minimul funcției f .
 - c) Pentru $m = 0$ să se determine valorile reale ale lui x pentru care $(f \circ f)(x) = 0$.
2. Fie polinomul $f = X^3 + X + 1$. Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la $X + 2$.
3. Se consideră șirurile $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}$, unde $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ și $b_n = 9^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
 - a) Să se arate că cele două șiruri sunt progresii geometrice și să se determine rația fiecăreia. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(a_n, b_n), n \geq 1$.
 - b) Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctele A_1 și A_2 .
 - c) Să se demonstreze că punctele $A_n(a_n, b_n)$ sunt situate pe dreapta $A_1A_2, \forall n \geq 1$.

SUBIECTUL II

1. Pe mulțimea numerelor reale definim legea $x \star y = -xy + 5x + 5y - 20$.
 - a) Să se arate că legea este asociativă.
 - b) Să se arate că $x \star 4 = x, \forall x \in \mathbb{R}$.
 - c) Să se demonstreze că mulțimea $(-\infty, 5)$ este parte stabilă în raport cu legea " \star ".
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{2x}$.
 - a) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$.
 - b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(0) + f^{(2)}(0) + \dots + f^{(n)}(0)}{2^n}$.

SUBIECTUL III

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -3 & -3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Definim $B = A + I_4$.

- a) Să se calculeze determinantul și rangul matricei A .
- b) Să se calculeze A^2 .
- c) Să se arate că $B^2 = 2B - I_4$.
- d) Să se demonstreze că B este inversabilă și să se calculeze inversa.
- e) Să se calculeze $B^n, \forall n \geq 1$.

SUBIECTUL IV

Se definește șirul $(I_n)_{n \geq 0}$ astfel:

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 6x + 10} dx \text{ și } I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 6x + 10} dx, n \geq 1.$$

1. Să se calculeze I_0 și I_1 .
2. Să se demonstreze că:

a) $I_{n+2} + 6I_{n+1} + 10I_n = \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$

b) $I_{n+1} \leq I_n, \forall n \in \mathbb{N}.$

c) $17I_{n+2} \leq \frac{1}{n+1} \leq 17I_n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

d) $\frac{1}{17(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{17(n-1)}, \forall n \geq 2.$

3. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n^a I_n$, unde $a \in \mathbb{R}.$

Varianta 3

Profilurile matematică-fizică, informatică și metrologie

SUBIECTUL I

1. Fie polinoamele $f = mX^2 + 2(m+1)X + m$, $m \in \mathbb{R}^*$ și $g = X^2 + X + 1$.
 - a) Să se determine valorile lui m pentru care f are rădăcini egale.
 - b) Dacă $y_1, y_2 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile lui g , să se arate că $y_1^3 = y_2^3 = 1$.
 - c) Să se arate că f și g au cel puțin o rădăcină comună dacă și numai dacă $m = -2$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan x + \cot^{-1} x$.
 - a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - b) Deduceți că $\arctan x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
3. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(0, 4)$, $B(4, 0)$, $C(6, 6)$.
 - a) Să se determine punctul $M(u, v)$ astfel încât $MA = MB = MC$.
 - b) Să se calculeze lungimea segmentului $[MA]$, unde M este punctul determinat la a).
 - c) Să se scrie ecuația cercului care trece prin punctele A, B, C .

SUBIECTUL II

1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
 - a) Să se arate că $AB = BA$.
 - b) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $(A+B)^n = A^n + B^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
 - c) Să se calculeze $(A+B)^n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.
2.
 - a) Să se arate că $1 - abc = 1 - a + a(1-b) + ab(1-c)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.
 - b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^5 2x}{x^2}$.
 - c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^5 2x \cdot \cos^3 3x \cdot \cos^2 5x}{x^2}$.

SUBIECTUL III

Fie mulțimea de numere reale $M = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 3b^2 = 1\}$.

- a) Să se arate că dacă $a + b\sqrt{3} = c + d\sqrt{3}$, cu $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, atunci $a = c$ și $b = d$.
- b) Să se arate că $1 \in M$.
- c) Să se demonstreze că M este parte stabilă în raport cu înmulțirea numerelor reale.
- d) Să se demonstreze că dacă $z \in M$, atunci $z \neq 0$ și $\frac{1}{z} \in M$.

SUBIECTUL IV

1. Să se determine $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{x+2} + \frac{a_3}{x+3}, \forall x > 0.$$

2. Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(e^x+1)(e^x+2)(e^x+3)}$ și $g(x) = \frac{1}{e^x+a}$, $a > 0$.

a) Să se calculeze $\int g(x) dx$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

Considerăm șirul $(s_n)_{n \geq 1}$ definit prin $s_n = \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{2n}\right) + f\left(\frac{3}{2n}\right) + \cdots + f\left(\frac{2n-1}{2n}\right) \right]$.

c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$.

Varianta 1

Profilurile economic, fizică-chimie și chimie-biologie

SUBIECTUL I

1. Fie polinoamele $f = mX^2 + 2(m+1)X + m$, $m \in \mathbb{R}^*$ și $g = X^2 + 3X + 9$.
 - a) Dacă $y_1, y_2 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile lui g , să se arate că $y_1^3 = y_2^3 = 27$.
 - b) Să se arate că f și g nu au nicio rădăcină comună, $\forall m \in \mathbb{R}^*$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan x + \cot^{-1} x$.
 - a) Să se arate că $f'(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.
 - b) Deduceți că $\arctan x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
3. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(0, 4)$, $B(4, 0)$, $C(6, 6)$.
 - a) Să se determine punctul $M(u, v)$ astfel încât $MA = MB = MC$.
 - b) Să se calculeze lungimea segmentului $[MA]$, unde M este punctul determinat la a).
 - c) Să se scrie ecuația cercului care trece prin punctele A, B, C .

SUBIECTUL II

1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
 - a) Să se arate că $AB = BA$.
 - b) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $(A+B)^n = A^n + B^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
 - c) Să se calculeze $(A+B)^{2000}$.
2.
 - a) Să se arate că $1 - abc = 1 - a + a(1-b) + ab(1-c)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.
 - b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$.
 - c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x \cdot \cos 3x \cdot \cos 5x}{x^2}$.

SUBIECTUL III

Fie mulțimea de numere reale $M = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 3b^2 = 1\}$.

- a) Să se arate că dacă $a + b\sqrt{3} = c + d\sqrt{3}$, cu $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, atunci $a = c$ și $b = d$.
- b) Să se arate că $1 \in M$.
- c) Să se demonstreze că M este parte stabilă în raport cu înmulțirea numerelor reale.
- d) Să se demonstreze că dacă $z \in M$, atunci $z \neq 0$ și $\frac{1}{z} \in M$.
- e) Să se găsească un element $z \in M$, $z = a + b\sqrt{3}$, în care $b \neq 0$.

SUBIECTUL IV

1. Să se determine $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{x+2} + \frac{a_3}{x+3}, \forall x > 0.$$

2. Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(e^x+1)(e^x+2)(e^x+3)}$ și $g(x) = \frac{1}{e^x+a}$, $a > 0$.
 - a) Să se calculeze $\int g(x) dx$.
 - b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

Varianta 2

Profilurile economic, fizică-chimie și chimie-biologie

SUBIECTUL I

1. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se determine a, b, c astfel încât $f(0) = 2$, $f'(1) = 1$ și $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$.
2. Să se determine toate numerele naturale n pentru care $C_n^2 = 10$.
3. Se consideră șirurile $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$ definite prin:

$$a_n = n + 2 \text{ și } b_n = 3n - 2, n \in \mathbb{N}^*.$$

- a) Să se arate că cele două șiruri sunt progresii aritmetice și să se determine rația fiecăreia.
În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(a_n, b_n)$, $n \geq 1$.
- b) Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctele A_1 și A_2 .
- c) Să se demonstreze că punctele $A_n(a_n, b_n)$ sunt situate pe dreapta A_1A_2 , $\forall n \geq 1$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinoamele $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ și $g = X^2 + X + 1$ cu rădăcinile $y_1, y_2 \in \mathbb{C}$.
 - a) Să se arate că $y_1^3 = y_2^3 = 1$.
 - b) Să se arate că polinomul f divide polinomul $X^5 - 1$.
 - c) Să se deducă identitatea $x_k^5 = 1, \forall k \in \{1, 2, 3, 4\}$.
 - d) Să se calculeze valoarea expresiei

$$A = (x_1 - y_1)(x_2 - y_1)(x_3 - y_1)(x_4 - y_1)(x_1 - y_2)(x_2 - y_2)(x_3 - y_2)(x_4 - y_2).$$

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 1}$.
 - a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - b) Să se studieze monotonia funcției f .
 - c) Să se determine asimptota oblică la ramura către $+\infty$ a graficului funcției f .

SUBIECTUL III

În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 2b^2 = 1 \right\}$.

- a) Să se arate că $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.
- b) Să se demonstreze că G este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor.
- c) Să se găsească o matrice $A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$ cu $b \neq 0$.
- d) Să se arate că mulțimea G conține o infinitate de elemente.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 6^x + \alpha^x - 14^x - 15^x$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.

- a) Să se calculeze $f'(x)$.
- b) Să se calculeze $f(0)$ și $f'(0)$.
- c) Să se determine α astfel încât $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Considerăm $\alpha = 35$.
- d) Să se calculeze aria cuprinsă între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

Varianta 3

Profilurile economic, fizică-chimie și chimie-biologie

SUBIECTUL I

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 9 + m$, unde m este un parametru real.
 - a) Să se determine valorile lui m pentru care $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
 - b) Să se determine punctul de minim și minimul funcției f .
2. Fie polinomul $f = X^3 + X + 1$. Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la $X + 2$.
3. Se consideră șirurile $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}$, unde $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ și $b_n = 9^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
 - a) Să se arate că cele două șiruri sunt progresii geometrice și să se determine rația fiecăreia.
În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(a_n, b_n), n \geq 1$.
 - b) Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctele A_1 și A_2 .
 - c) Să se demonstreze că punctele $A_n(a_n, b_n)$ sunt situate pe dreapta $A_1A_2, \forall n \geq 1$.

SUBIECTUL II

1. Pe mulțimea numerelor reale definim legea $x \star y = -xy + 5x + 5y - 20$.
 - a) Să se arate că legea este asociativă.
 - b) Să se arate că $x \star 4 = x, \forall x \in \mathbb{R}$.
 - c) Să se demonstreze că mulțimea $(-\infty, 5)$ este parte stabilă în raport cu legea " \star ".
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{-x}$.
 - a) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$.
 - b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(2)}(0) + f^{(4)}(0) + \dots + f^{(2n)}(0)}{n + 1}$.

SUBIECTUL III

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Definim $B = A + I_3$.

- a) Să se calculeze determinantul și rangul matricei A .
- b) Să se calculeze A^2 .
- c) Să se arate că $B^2 = 2B - I_3$.
- d) Să se demonstreze că B este inversabilă și să se calculeze inversa.
- e) Să se calculeze $B^n, \forall n \geq 1$.

SUBIECTUL IV

Se definește șirul $(I_n)_{n \geq 0}$ astfel:

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx \text{ și } I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx, n \geq 1.$$

1. Să se calculeze I_0 și I_1 .
2. Să se demonstreze că:
 - a) $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

b) $I_{n+1} \leq I_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

c) $2I_{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \leq 2I_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

d) $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}, \forall n \geq 2$.

3. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{I_n}$.

Varianta 1

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv-real

SUBIECTUL I

1. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 9 + m$, unde m este un parametru real.
 - a) Să se determine valorile lui m pentru care $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
 - b) Să se determine punctul de minim și minimul funcției f .
2. Fie polinomul $f = X^3 + X + 1$. Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la $X + 2$.
3. Se consideră șirurile $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$, unde $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ și $b_n = 9^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
 - a) Să se arate că cele două șiruri sunt progresii geometrice și să se determine rația fiecăreia. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(a_n, b_n)$, $n \geq 1$.
 - b) Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctele A_1 și A_2 .
 - c) Să se demonstreze că punctele $A_n(a_n, b_n)$ sunt situate pe dreapta A_1A_2 , $\forall n \geq 1$.

SUBIECTUL II

1. Pe mulțimea numerelor reale definim legea $x \star y = -xy + 5x + 5y - 20$.
 - a) Să se arate că legea este asociativă.
 - b) Să se arate că $x \star 4 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
 - c) Să se demonstreze că mulțimea $(-\infty, 5)$ este parte stabilă în raport cu legea " \star ".
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$.
 - a) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
 - b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(2)}(0) + f^{(4)}(0) + \dots + f^{(2n)}(0)}{n+1}$.

SUBIECTUL III

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Definim $B = A + I_2$.

- a) Să se calculeze determinantul și rangul matricei A .
- b) Să se calculeze A^2 .
- c) Să se arate că $B^2 = 2B - I_2$.
- d) Să se demonstreze că B este inversabilă și să se calculeze inversa.
- e) Să se calculeze B^n , $\forall n \geq 1$.

SUBIECTUL IV

Se definește șirul $(I_n)_{n \geq 0}$ astfel:

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 6x + 10} dx \text{ și } I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 6x + 10} dx, n \geq 1.$$

1. Să se calculeze I_0 și I_1 .
2.
 - a) Să se demonstreze că $0 \leq \frac{x^n}{x^2 + 6x + 10} \leq x^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0, 1]$.
 - b) Să se arate că $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
 - c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} I_n$.

Varianta 2

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv-real

SUBIECTUL I

1. Fie polinoamele $f = mX^2 + 2(m+1)X + m$, $m \in \mathbb{R}^*$ și $g = X^2 + 2X + 4$.
 - a) Dacă $y_1, y_2 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile lui g , să se arate că $y_1^3 = y_2^3 = 8$.
 - b) Să se arate că f și g nu au nicio rădăcină comună, $\forall m \in \mathbb{R}^*$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan x + \cot^{-1} x$. Să se calculeze $f''(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
3. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(0, 4)$, $B(4, 0)$, $C(6, 6)$.
 - a) Să se determine coordonatele punctului M , mijlocul segmentului $[AB]$.
 - b) Să se scrie ecuația dreptei CM .

SUBIECTUL II

1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
 - a) Să se calculeze determinantul și rangul matricei A .
 - b) Să se arate că $AB = BA$.
 - c) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $(A+B)^n = A^n + B^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$.
 - a) Să se determine asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției f .
 - b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(1) + f(2) + \dots + f(n))$.

SUBIECTUL III

Fie mulțimea de numere reale $M = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 3b^2 = 1\}$.

- a) Să se arate că dacă $a + b\sqrt{3} = c + d\sqrt{3}$, cu $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, atunci $a = c$ și $b = d$.
- b) Să se arate că $1 \in M$.
- c) Să se demonstreze că M este parte stabilă în raport cu înmulțirea numerelor reale.
- d) Să se demonstreze că dacă $z \in M$, atunci $z \neq 0$ și $\frac{1}{z} \in M$.

SUBIECTUL IV

1. Să se determine $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{x+2}, \forall x > 0.$$

2. Fie funcțiile $f, g, F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{e^x + a}$ cu $a > 0$, $g(x) = \frac{1}{(e^x + 1)(e^x + 2)}$ și $F(x) = \frac{1}{a}(x - \ln(e^x + a))$.
 - a) Să se arate că $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
 - b) Să se calculeze $\int_0^1 g(x) dx$.

Varianta 3

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv-real

SUBIECTUL I

1. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se determine a, b, c astfel încât $f(0) = 2$, $f'(1) = 1$ și $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$.
2. Să se rezolve ecuația $C_n^2 = 10$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.
3. Se consideră șirurile $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$ definite prin:

$$a_n = n + 2 \text{ și } b_n = 3n - 2, n \in \mathbb{N}^*.$$

- a) Să se arate că cele două șiruri sunt progresii aritmetice și să se determine rația fiecăreia. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(a_n, b_n)$, $n \geq 1$.
- b) Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctele A_1 și A_2 .
- c) Să se demonstreze că punctele $A_n(a_n, b_n)$ sunt situate pe dreapta A_1A_2 , $\forall n \geq 1$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinoamele $f = X^3 + X^2 + X + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ și $g = X^2 + 3X + 9$ cu rădăcinile $y_1, y_2 \in \mathbb{C}$.
 - a) Să se arate că $y_1^3 = y_2^3 = 27$.
 - b) Să se determine x_1, x_2, x_3 .
 - d) Să se calculeze

$$A = (x_1 - y_1)(x_1 - y_2)(x_2 - y_1)(x_2 - y_2)(x_3 - y_1)(x_3 - y_2).$$

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.
 - a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - b) Să se studieze monotonia funcției f .
 - c) Să se determine asimptota spre $+\infty$ la graficului funcției f .

SUBIECTUL III

În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 2b^2 = 1 \right\}$.

- a) Să se arate că $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.
- b) Să se demonstreze că G este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor.
- c) Să se găsească o matrice $A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$ cu $b \neq 0$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 6^x + 35^x - 14^x - 15^x$.

- a) Să se demonstreze că $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- b) Să se calculeze aria cuprinsă între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.
- c) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că

$$f^{(n)}(x) = (\ln 6)^n \cdot 6^x + (\ln 35)^n \cdot 35^x - (\ln 14)^n \cdot 14^x - (\ln 15)^n \cdot 15^x, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Varianta 1

Profil pedagogic

SUBIECTUL I

1. Să se determine cel mai mare număr natural de trei cifre care împărțit la 5, 7, 9 să dea de fiecare dată restul 3.
2. a) Suma a cinci numere naturale consecutive este 145. Să se determine numerele.
b) Suma a x numere naturale consecutive este $7x + 14$, $x \geq 2$. Să se determine numerele.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX - 5$, cu $a, b \in \mathbb{R}$.
a) Să se determine a și b astfel încât $X - 5$ divide f și $f(1) + 8 = 0$.
b) Pentru $a = -5$ și $b = 1$ să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.
2. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Să se arate că $AB = BA$.
b) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $(A + B)^n = A^n + B^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL III

Pe mulțimea numerelor reale definim legea $x \star y = -xy + 5x + 5y - 20$.

- a) Să se arate că legea este asociativă.
- b) Să se arate că $x \star 4 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- c) Să se demonstreze că mulțimea $(-\infty, 5)$ este parte stabilă în raport cu legea " \star ".
- d) Să se rezolve ecuația $\underbrace{x \star x \star \dots \star x}_{\text{de } 10 \text{ ori } x} = 5$.

SUBIECTUL IV

Se consideră un tetraedru regulat de muchie a .

- a) Să se calculeze aria totală a tetraedrului.
- b) Să se calculeze cosinusul unghiului format de două fețe ale tetraedrului.
- c) Să se demonstreze că suma distanțelor de la un punct interior tetraedrului la cele patru fețe ale lui este constantă.

Varianta 2

Profil pedagogic

SUBIECTUL I

1. Suma a două numere naturale a și b este 40, iar cel mai mare divizor comun al lor este 5. Să se determine cele două numere, știind că $a \leq b \leq 2a$.
2. Numărul 1000 se micșorează cu 20%. Cu ce procent trebuie mărit numărul rezultat pentru a se obține din nou 1000?
3. Scrierea zecimală a numărului $\frac{1}{13}$ este $0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$. Să se determine a_{2000} .

SUBIECTUL II

1. Să se rezolve ecuația $\log_2 x + \log_3 x + \log_5 x = 0$, $x > 0$.
2. Se consideră polinoamele $f = (X + 1)^6 + (X - 1)^6$ și $g = 2(X^3 + 15X^2 + 15X + 1)$.
 - a) Să se arate că $f(X) = g(X^2)$.
 - b) Să se calculeze $g(-1)$.
 - c) Să se rezolve ecuația $g(x) = 0$.
 - d) Să se determine rădăcinile polinomului f .

SUBIECTUL III

În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 2b^2 = 1 \right\}$.

- a) Să se arate că $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.
- b) Să se demonstreze că G este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor.
- c) Să se găsească o matrice $A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$ cu $b \neq 0$.
- d) Să se arate că mulțimea G conține o infinitate de elemente.

SUBIECTUL IV

Secțiunea axială a unui con circular drept este un triunghi isoscel VAB cu $m(\sphericalangle AVB) = 120^\circ$ și $VA = VB = 6$ cm.

- a) Să se calculeze raza conului.
- b) Să se calculeze volumul conului.
- c) Fie M și N două puncte situate pe $[AV]$ astfel încât $VM = MN = NA = 2$ cm și două plane paralele cu baza conului duse prin M și N . Calculați raportul volumelor trunchiurilor de con care au generatoarele egale cu MN , respectiv NA .

Varianta 3

Profil pedagogic

SUBIECTUL I

1. Numerele naturale a , b și c sunt direct proporționale cu 2, 3 și respectiv 6, iar produsul lor este egal cu 4500. Să se afle numerele.
2. Cinci cărți și trei caiete costă 245000 lei, iar trei cărți și cinci caiete costă 195000 lei.
 - a) Cât costă un caiet și cât costă o carte?
 - b) Câte cărți și câte caiete se pot cumpăra cu 250000 lei, dacă se cumpără în total 10 bucăți?

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul $g = X^6 + X^2 + 1$.
 - a) Să se calculeze $(g(i))^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
 - b) Să se afle câtul și restul împărțirii lui g la $X^2 - 2$.
2. În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ și $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$.
 - a) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât determinantul matricei $A + X$ să fie egal cu 15.
 - b) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
 - c) Să se calculeze $A + A^2 + \dots + A^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL III

Pe mulțimea numerelor reale definim legea $x \star y = x + y - 3$.

- a) Să se arate că legea " \star " este comutativă.
- b) Să se arate că legea " \star " este asociativă.
- c) Să se arate că $x \star (6 - x) = 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- d) Să se rezolve ecuația $\underbrace{x \star x \star \dots \star x}_{\text{de 40 ori } x} = 3$.

SUBIECTUL IV

Un trunchi de piramidă patrulateră are laturile bazelor de lungimi egale cu 6 cm, respectiv 10 cm și volumul egal cu 196 cm^3 . Să se calculeze:

- a) înălțimea trunchiului de piramidă;
- b) aria laterală a trunchiului de piramidă;
- c) sinusul unghiului format de planele a două fețe laterale opuse.

Varianta 1

Profil uman

SUBIECTUL I

- Se consideră polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX - 5$, cu $a, b \in \mathbb{R}$.
 - Să se determine a și b astfel încât $X - 5$ divide f și $f(1) + 8 = 0$.
 - Pentru $a = -5$ și $b = 1$ să se afle câtul și restul împărțirii lui f la $X^2 + 2$.
 - Pentru $a = -5$ și $b = 1$ să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.
- Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$. Să se calculeze:
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
 - $f(0) + f'(0) + f''(0)$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuații $d_1 : 5x - y - 8 = 0$, $d_2 : 3x + 2y - 10 = 0$ și $d_3 : x - 5y + 8 = 0$.
 - Să se determine punctul de intersecție al dreptelor d_1 și d_2 .
 - Să se arate că dreapta d_3 trece prin punctul de intersecție al dreptelor d_1 și d_2 .

SUBIECTUL II

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Să se arate că $AB = BA$.
- Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $(A + B)^n = A^n + B^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL III

Fie funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x + 4}{x^2 + x - 6}$.

- Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = \frac{a}{x + 3} + \frac{b}{x - 2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}$.
- Să se calculeze $\int f(x) dx$, $x \in (2, \infty)$.
- Să se determine asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției f .

SUBIECTUL IV

Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție $x \star y = -xy + 5x + 5y - 20$.

- Să se arate că legea " \star " este asociativă.
- Să se arate că $x \star 4 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- Să se rezolve ecuația $x \star x \star x \star x = 5$.

Varianta 2

Profil uman

SUBIECTUL I

1. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se determine a, b, c astfel încât $f(0) = 1$, $f'(1) = 2$ și $\int_0^1 f(x) dx = 0$.
2. Să se rezolve ecuația $\log_2 x + \log_3 x + \log_5 x = 0$, $x > 0$.
3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuații $d_1 : 5x - 3y - 2 = 0$, $d_2 : -3x + 4y - 1 = 0$.
 - a) Să se determine punctul de intersecție al dreptelor d_1 și d_2 .
 - b) Să se scrie ecuația dreptei de pantă 2, care trece prin punctul de intersecție al dreptelor d_1 și d_2 .

SUBIECTUL II

Se consideră polinoamele $f = (X + 1)^6 + (X - 1)^6$ și $g = X^4 + 14X^2 + 1$.

- a) Să se arate că polinomul f se divide prin polinomul g .
- b) Să se rezolve ecuația $g(x) = 0$.
- c) Să se determine rădăcinile polinomului f .

SUBIECTUL III

Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$.

- a) Să se arate că $f'(x) + f''(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(1) + f(2) + \dots + f(n)]$.
- c) Să se calculeze $\int_0^1 xf(x) dx$.

SUBIECTUL IV

În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 2b^2 = 1 \right\}$.

- a) Să se arate că $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.
- b) Să se arate că dacă $A, B \in G$, atunci $A \cdot B \in G$.
- c) Să se găsească o matrice $A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$ cu $b \neq 0$.
- d) Să se arate că mulțimea G conține o infinitate de elemente.

Varianta 3

Profil uman

SUBIECTUL I

1. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se determine a, b, c astfel încât $f(0) = 1$, $f'(1) = 6$ și $f''(2) = 52$.
2. Se consideră polinomul $g = X^6 + X^2 + 1$.
 - a) Să se calculeze $(g(i))^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
 - b) Să se afle câtul și restul împărțirii lui g la $X^2 - 2$.
3. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3, 3), B(5, 1), C(-4, 4)$.
 - a) Să se determine coordonatele punctului M , mijlocul segmentului $[AB]$.
 - b) Să se scrie ecuația dreptei CM .

SUBIECTUL II

În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ și $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$.

- a) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât determinantul matricei $A + X$ să fie egal cu 15.
- b) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- c) Să se calculeze $A + A^2 + \dots + A^n, n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL III

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x + 1$.

- a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2}$.
- b) Să se calculeze cuprinsă între graficul funcției f și dreapta $y = 4$.
- c) Să se determine $a \in (-3, 1)$ astfel încât dreapta $x = a$ să despartă suprafața de la punctul anterior în două regiuni care au arii egale.

SUBIECTUL IV

Pe mulțimea numerelor reale definim legea $x \star y = x + y - 3$.

- a) Să se arate că legea " \star " este comutativă.
- b) Să se arate că legea " \star " este asociativă.
- c) Să se arate că $x \star (6 - x) = 3, \forall x \in \mathbb{R}$.
- d) Să se rezolve ecuația $\underbrace{x \star x \star \dots \star x}_{\text{de 40 ori } x} = 3$.