

**BACALAUREAT 2001
SESIUNEA SPECIALĂ**

Profilurile economic, fizică-chimie, chimie-biologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul $f = X^3 - X + 2$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ și polinomul $g = X^2 - X + 1$ cu rădăcinile $y_1, y_2 \in \mathbb{C}$.
 - a) Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul g .
 - b) Să se verifice că $y_1^3 = y_2^3 = -1$.
 - c) Să se arate că numărul $a = f(y_1) + f(y_2)$ este natural.
 - d) Să se calculeze $b = g(x_1) + g(x_2) + g(x_3)$.
2. a) Să se arate că $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ pentru orice $x > 0$.
Notăm cu $s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
 - b) Să se arate că $s_n = \frac{n}{n+1}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
 - c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$.
 - d) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^n$.
3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $B(-1, 1)$ și $A_n(2n+1, 3n-2)$, $n \in \mathbb{N}$.
 - a) Să se scrie ecuația dreptei A_0A_1 .
 - b) Să se arate că punctul A_n se află pe dreapta A_0A_1 , $(\forall) n \in \mathbb{N}$.
 - c) Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctul B și are aceeași pantă cu dreapta A_0A_1 .

SUBIECTUL II

1. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție "o" definită prin $x \circ y = x + y - 2$.
 - a) Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R}$.
 - b) Să se determine numărul real e astfel încât $x \circ e = e \circ x = x$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - c) Să se stabilească dacă mulțimea $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ este parte stabilă în raport cu legea "o". Justificați răspunsul.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 12}{x + 2}$.
 - a) Să se verifice identitatea $f(x) = x + 4 + \frac{4}{x + 2}$, $(\forall) x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
 - b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
 - c) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
 - d) Să se arate că funcția f are un punct de maxim, un punct de minim și să se determine coordonatele lor.

SUBIECTUL III

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -4 \\ 6 & 6 & -6 \end{pmatrix}$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Să se calculeze determinantul și rangul matricei A .
- b) Să se calculeze A^2 .

- c) Să se verifice identitatea $I_3 = (I_3 - A)(I_3 + A)$.
- d) Să se arate că matricea $I_3 - A$ este inversabilă și să i se calculeze inversa.
- e) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $(I_3 + A)^n = I_3 + nA$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL IV

- a) Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$, pentru care $\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x+3}$, $x > 0$.
Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(e^x + 1)(e^x + 2)(e^x + 3)}$.
- b) Să se determine asimptotele la graficul funcției f .
- c) Să se calculeze $\int \frac{1}{e^x + a} dx$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$.
- d) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinsă între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.
- e) Fie funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$.

SESIUNEA IUNIE-IULIE

Varianta 1

Profilurile matematică-fizică, informatică și metrologie

SUBIECTUL I

- Să se verifice identitatea $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$, $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că dacă $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$, $x, y, z \in \mathbb{R}$, atunci $x = y = z$.
 - Să se rezolve ecuația $4^x + 9^2 + 25^x = 6^x + 10^x + 15^x$, $x \in \mathbb{R}$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1)e^{-x}$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se studieze semnul funcției f .
 - Să se arate că $f(x) \leq 1$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctul $A(1, 1)$ și dreapta $d : 5x + 12y + 9 = 0$.
 - Să se calculeze distanța de la punctul A la dreapta d .
 - Să se scrie ecuația cercului \mathcal{C} cu centrul în A și care este tangent dreptei d .
 - Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta d .

SUBIECTUL II

- În inelul $\mathbb{Z}_6[X]$, se consideră polinomul $f = X^3 - X$. Notăm cu $A \subset \mathbb{Z}_6$ mulțimea rădăcinilor polinomului f .
 - Să se verifice că $A = \mathbb{Z}_6$.
 - Să se găsească un polinom nenul $g \in \mathbb{Z}_6[X]$, $g \neq \pm f$, care să aibă mai multe rădăcini decât gradul său. Notăm cu $S_k = \hat{1}^k + \hat{2}^k + \hat{3}^k + \hat{4}^k + \hat{5}^k$, $k \in \mathbb{N}^*$.
 - Să se calculeze S_1 și S_2 .
 - Să se arate că $S_k \in \{\hat{1}, \hat{3}\}$, $(\forall) k \in \mathbb{N}^*$.
- Se consideră funcțiile $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ și $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.
 - Să se verifice că $f(x) = x - \frac{x}{x^2 + 1}$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Să se determine $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{xf(x)}$.

SUBIECTUL III

Se consideră mulțimea $G = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ pe care se definește legea de compoziție "o" prin

$$(a_1, x_1) \circ (a_2, x_2) = (a_1 a_2, a_1 x_2 + a_2 x_1).$$

- Să se arate că $((a_1, x_1) \circ (a_2, x_2)) \circ (a_3, x_3) = (a_1, x_1) \circ ((a_2, x_2) \circ (a_3, x_3))$, $(\forall) (a_1, x_1), (a_2, x_2), (a_3, x_3) \in G$.
- Să se verifice că $(a, x) \circ (1, 0) = (1, 0) \circ (a, x) = (a, x)$, $(\forall) (a, x) \in G$.
- Să se verifice că $(a, x) \circ \left(\frac{1}{a}, -\frac{x}{a}\right) = \left(\frac{1}{a}, -\frac{x}{a}\right) \circ (a, x) = (1, 0)$, $(\forall) (a, x) \in G$.

- d)** Să se găsească două elemente (a_1, x_1) și (a_2, x_2) din mulțimea G pentru care $(a_1, x_1) \circ (a_2, x_2) \neq (a_2, x_2) \circ (a_1, x_1)$.
- e)** Să se demonstreze că $(\forall) (a, x) \in G$ și $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$, există $(u, v) \in G$ astfel încât $\underbrace{(u, v) \circ (u, v) \circ \dots \circ (u, v)}_{\text{de } n \text{ ori } (u, v)} = (a, x)$.

SUBIECTUL IV

Se consideră numerele reale a_1, a_2, \dots, a_n și funcțiile $f, F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx$ și $F(x) = a_1 \sin x + \frac{a_2}{2} \sin 2x + \dots + \frac{a_n}{n} \sin nx$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

- a)** Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f pe \mathbb{R} .
- b)** Să se verifice că funcția $F(k\pi) = 0$, $(\forall) k \in \mathbb{Z}$.
- c)** Să se arate că dacă $f(x) \geq 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$, atunci $F(x) = 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
- d)** Să se arate că dacă $F(x) = 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$, atunci $f(x) = 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

Notăm cu $J(p, q) = \int_0^{2\pi} \cos px \cos qx \, dx$, $(\forall) p, q \in \mathbb{N}^*$.

- e)** Utilizând formula $2 \cos a \cos b = \cos(a + b) + \cos(a - b)$, $(\forall) a, b \in \mathbb{R}$, să se arate că

$$J(p, q) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } p \neq q, p, q \in \mathbb{N}^* \\ \pi, & (\forall) p \in \mathbb{N}^* \end{cases} .$$

- f)** Să se demonstreze că dacă $f(x) \geq 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$, atunci $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

Varianta 2

SUBIECTUL I

1. Se consideră matricele $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y = (-1 \ 1 \ 2 \ -2)$ și $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.
- Să se calculeze $XY - A$.
 - Să se calculeze determinantul și rangul matricei A .
 - Să se calculeze A^2 .
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x^3$.
- Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că funcția f este bijectivă.
 - Să se arate că există un număr real unic c , astfel încât $f(c) = c$.
3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(2, 0)$, $C(3, -1)$ și dreapta $d : x - y = 0$.
- Să se scrie ecuația dreptei AB .
 - Să se arate că punctele A , B și C sunt coliniare.
 - Să se calculeze distanța de la punctul C la dreapta d .

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinoamele $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ și $g = X^3 + X^2 + X + 1$ cu rădăcinile $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{C}$.
- Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul g .
 - Să se determine y_1, y_2 și y_3 .
 - Să se arate că numărul $a = g(x_1)g(x_2)g(x_3)g(x_4)$ este natural.
 - Să se arate că $f(x) > 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3^x + a^x - 4^x - 6^x$, unde $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$.
- Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $f(0)$ și $f'(0)$.
 - Să se determine $a > 0$ astfel încât $f(x) \geq 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Pentru $a = 8$, să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

SUBIECTUL III

Se consideră o funcție $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, cu proprietatea $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $(\forall) x, y \in \mathbb{Q}$.

- Să se arate că $f(0) = 0$.
- Să se arate că $f(-x) = -f(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{Q}$.
- Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$ și $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{Q}$.
- Să se deducă egalitatea $f(nx) = nf(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{Q}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$.
- Notăm $a = f(1)$, $a \in \mathbb{Q}$. Să se arate că $f(x) = ax$, $(\forall) x \in \mathbb{Q}$.
- Să se demonstreze că dacă $(H, +)$ este subgrup al grupului $(\mathbb{Q}, +)$ și este izomorf cu grupul $(\mathbb{Q}, +)$, atunci $H = \mathbb{Q}$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcțiile $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cos \frac{\pi}{x}$ și $g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \cos x + x \sin x$.

- a) Să se calculeze $g'(x)$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.
- c) Să se verifice că $g'(x) > 0$, $(\forall) x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
- d) Să se arate că $g(x) > 1$, $(\forall) x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
- e) Utilizând teorema lui Lagrange pentru funcția f , să se demonstreze inegalitatea $f(x+1) - f(x) > 1$, $(\forall) x > 2$.
- f) Să se arate că $f(n) > n - 2$, $(\forall) n \geq 3$.
- g) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(1) + f(2) + \dots + f(n)}{n^2}$.

Varianta 3

SUBIECTUL I

- Se consideră polinomul $f = X^4 - 6X^3 + 13X^2 - 12X + 5$.
 - Să se verifice că $f = (X - 1)^2(X - 2)^2 + 1$.
 - Să se arate că polinomul f nu are rădăcini reale.
 - Să se demonstreze că polinomul f nu se poate descompune în produs de două polinoame neconstante cu coeficienți întregi.
- Se consideră funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + 1}$.
 - Să se calculeze $g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se determine asimptotele la graficul funcției g .
 - Să se calculeze $\int g(x) dx$, $x \in \mathbb{R}$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(6, 0)$, $B(0, 6)$, $C(12, 12)$.
 - Să se determine aria triunghiului ABC .
 - Să se determine coordonatele punctului $M(u, v)$, astfel încât $MA = MB = MC$.
 - Să se scrie ecuația cercului care trece prin punctele A , B și C .

SUBIECTUL II

- Se consideră polinoamele cu coeficienți în corpul \mathbb{Z}_3 , $f = X^3 + \hat{2}X$ și $g = X^5 + \hat{2}X$.
 - Să se determine rădăcinile polinomului f .
 - Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului g la polinomul f .
 - Notăm cu x_1, x_2 și $x_3 \in \mathbb{Z}_3$ rădăcinile polinomului f . Să se calculeze $S = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ și $T = x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$.
- Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \ln(x + 1) - \ln x$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.
 - Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(1) + f(2) + \dots + f(n)}{\ln(n^2 + 1)}$.
 - Să se demonstreze că funcția f este bijectivă.
 - Notăm cu g inversa funcției f . Să se calculeze $g'(\ln 2)$.

SUBIECTUL III

Se consideră numerele reale distincte a, b, c, d , funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = (x - a)(x -$

$$b)(x - c)(x - d), g(x) = x^3 + x + 1 \text{ și determinantul } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}.$$

- Să verifice că $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y - x)(z - x)(z - y)$, $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R}$.
- Să arate că $\Delta = (b - a)(c - a)(d - a)(c - b)(d - b)(d - c)$.
- Să se verifice că $f'(a) = (a - b)(a - c)(a - d)$.
- Se consideră determinantul $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ g(a) & g(b) & g(c) & g(d) \end{vmatrix}$. Să se arate că $A = \Delta$.

- e) Dezvoltând determinantul A după ultima linie, să se arate că $\frac{g(a)}{f'(a)} + \frac{g(b)}{f'(b)} + \frac{g(c)}{f'(c)} + \frac{g(d)}{f'(d)} = 1$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!}$.

- a) Să se calculeze $f'(x)$, $f^{(2)}(x)$, $f^{(3)}(x)$, $f^{(4)}(x)$.
- b) Să se calculeze $f'(0)$, $f^{(2)}(0)$, $f^{(3)}(0)$, $f^{(4)}(0)$.
- c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^5}$.
- d) Să se arate că $f'(x) \geq 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
- e) Să se deducă inegalitatea $f(x) < 0$, $(\forall) x < 0$.
- f) Se consideră funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-x^2}$. Să se demonstreze că aria suprafeței cuprinsă între graficul funcției g , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$ este un număr din intervalul $(0,74; 0,75)$.

Varianta 4

SUBIECTUL I

- Se consideră polinomul $f = X^3 - X + 3$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ și polinomul $g = X^2 + X + 1$, cu rădăcinile $y_1, y_2 \in \mathbb{C}$.
 - Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul g .
 - Să se verifice că $y_1^3 = y_2^3 = 1$.
 - Să se arate că numărul $a = f(y_1) + f(y_2)$ este natural.
 - Să se calculeze $b = g(x_1) + g(x_2) + g(x_3)$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se determine asimptotele la graficul funcției f .
 - Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(3, 0)$, $B(0, 4)$, $C(3, 4)$.
 - Să se determine aria triunghiului ABC .
 - Să se determine perimetrul triunghiului ABC .
 - Să se demonstreze că triunghiul ABC este dreptunghic.

SUBIECTUL II

- Se consideră binomul $a = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^{100}$.
 - Să se determine numărul de termeni raționali din dezvoltarea binomului. Notăm cu S suma termenilor raționali și cu T suma termenilor iraționali ai binomului.
 - Să se arate că $S - T = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^{100}$.
 - Să se arate că $S > T$.
 - Să se arate că $S - T < \frac{1}{3^{100}}$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$.
 - Să se arate că $f(-x) = -f(x)$, (\forall) $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

SUBIECTUL III

Se consideră matricele $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y = (1 \ 2 \ -1 \ -2)$, $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Definim $B = aA + I_4$, unde $a \in \mathbb{R}$.

- Să se calculeze matricea $XY - A$.
- Să se calculeze determinantul și rangul matricei A .
- Să se calculeze A^2 .
- Să se verifice că $2B - B^2 = I_4$.

- e) Să se arate că B este inversabilă, $(\forall) a \in \mathbb{R}$ și să se calculeze inversa sa.
- f) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $B^n = I_4 + naA$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$ și $(\forall) a \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL IV

Se consideră numărul real $a \in (0, 1]$ și șirurile $(x_n)_{n \geq 1}$, $(I_n)_{n \geq 1}$, $x_n = a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{a^{2n-1}}{2n-1}$ și $I_n = \int_0^a \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Să se demonstreze identitatea

$$1 - x^2 + x^4 + \dots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} = \frac{1 + (-1)^{n-1} x^{2n}}{1 + x^2}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*, (\forall) x \in \mathbb{R}.$$

- b) Integrând identitatea de la punctul a), să se arate că $x_n = \operatorname{arctg} a + (-1)^{n-1} I_n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$, $a \in (0, 1]$.

- c) Să se arate că $0 \leq \frac{x^{2n}}{1+x^2} \leq x^{2n}$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

- d) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \operatorname{arctg} a$.

- e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} + \dots + \frac{(-1)^n 4}{2n+1} \right)$.

Varianta 5

SUBIECTUL I

- În mulțimea permutărilor cu cinci elemente S_5 se consideră permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
 - Să se determine numărul de inversiuni ale permutării σ .
 - Să se determine τ^{-1} .
 - Să se rezolve în S_5 ecuația $\tau \cdot \sigma = \sigma$.
- Să se verifice identitatea $\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$, $(\forall) x > 0$.
 - Notăm cu $a_n = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că $a_n = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
 - Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
 - Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{n^2}$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(2n, 3n+2)$, $n \in \mathbb{N}$.
 - Să se scrie ecuația dreptei A_0A_1 .
 - Să se arate că punctul A_n se află pe dreapta A_0A_1 , $(\forall) n \in \mathbb{N}$.
 - Să se arate că lungimea segmentului A_nA_{n+1} $n \in \mathbb{N}$, nu depinde de n .

SUBIECTUL II

- Se consideră polinoamele cu coeficienți în \mathbb{Z}_3 , $f = \hat{a}X + \hat{b}$ și $g = X^6 + X^3 + \hat{1}$.
 - Să se verifice că pentru orice $\hat{a} \in \mathbb{Z}_3$, avem $\hat{a}^3 = \hat{a}$.
 - Să se arate că $(f(X))^3 = f(X^3)$.
 - Să se arate că $X^2 + X + \hat{1} = (X + \hat{2})^2$.
 - Să se descompună polinomul g în factori ireductibili, în inelul $\mathbb{Z}_3[X]$.
- Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctg(x+2) - \arctg x$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că $x = -1$ este punct de maxim local pentru funcția f .
 - Să se determine asimptotele la graficul funcției f .
 - Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

SUBIECTUL III

Se consideră sistemul $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 5x + 3y + z = 0 \\ x + 3y + 5z = 0 \end{cases}$ și matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Notăm cu A matricea

sistemului.

- Să se calculeze determinantul și rangul matricei A .
- Să se rezolve sistemul.
- Să se găsească o matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $B \neq O_3$, astfel încât $AB = O_3$.
- Să se arate că $A^n \neq I_3$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
- Să se arate că $\det \left(A + \frac{1}{n} I_3 \right) \neq 0$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^a$, unde $a \in \mathbb{R}$.

- a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- b) Folosind teorema lui Lagrange, să se arate că există $c(a)$, care depinde de a , $c(a) \in (2, 3)$ și $d(a)$, care depinde de a , $d(a) \in (4, 5)$, astfel încât să avem $3^a - 2^a = a(c(a))^{a-1}$ și $5^a - 4^a = a(d(a))^{a-1}$.
- c) Să se arate că pentru orice funcții $g : \mathbb{R} \rightarrow (2, 3)$ și $h : \mathbb{R} \rightarrow (4, 5)$, ecuația $x(g(x))^{x-1} = x(h(x))^{x-1}$ are numai soluțiile $x = 0$ și $x = 1$.
- d) Să se rezolve ecuația $3^a + 4^a = 2^a + 5^a$, $a \in \mathbb{R}$.
- e) Să se demonstreze că $3^x + 4^x > 2^x + 5^x$, $(\forall) x \in (0, 1)$.
- f) Să se demonstreze că $\frac{2}{\ln 3} + \frac{3}{\ln 4} > \frac{1}{\ln 2} + \frac{4}{\ln 5}$.

SESIUNEA IUNIE-IULIE

Varianta 1

Profilurile economic, fizică-chimie, chimie-biologie și militar real

SUBIECTUL I

- Se consideră determinantul $d = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{C}$.
 - Dezvoltând determinantul d , să se arate că $d = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.
 - Utilizând proprietățile determinantilor, să se arate că $d = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$.
 - Să se demonstreze identitatea $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2)$.
 - Să se rezolve ecuația $8^x + 27^x + 125^x = 3 \cdot 30^x$, $x \in \mathbb{R}$.
- Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x$.
 - Să se calculeze $f(0)$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(2, 2)$ și $C(-2, 4)$.
 - Să se scrie ecuația dreptei AB .
 - Să se calculeze panta dreptei BC .
 - Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC .

SUBIECTUL II

- Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, definit prin $a_n = 2n - 1$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
 - Să se arate că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ formează o progresie aritmetică și să se calculeze rația progresiei.
 - Să se determine valoarea numărului natural n pentru care $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2001^2$.
 - Să se verifice că șirul $(b_n)_{n \geq 1}$, $b_n = 2^{a_n}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$, formează o progresie geometrică.
 - Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $a_n < b_n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
- Se consideră șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $a_n = \frac{1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n!}{(n + 1)!}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
 - Să se verifice identitatea $k \cdot k! = (k + 1)! - k!$, $(\forall) k \in \mathbb{N}$.
 - Să se arate că $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
 - Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
 - Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{(n+1)!}$.

SUBIECTUL III

Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție "o" definită prin $x \circ y = 2xy - 2x - 2y + 3$.

- Să se verifice că $x \circ y = 2(x - 1)(y - 1) + 1$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$.
- Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R}$.
- Să se verifice că $x \circ 1 = 1 \circ x = 1$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

- d) Să se stabilească dacă mulțimea $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ este parte stabilă în raport cu legea "o". Justificați răspunsul.
- e) Să se rezolve ecuația $x \circ x \circ x \circ x \circ x = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - e \ln x$.

- a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.
- b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .
- c) Să se arate că $f(x) \geq 0$, $(\forall) x \in (0, \infty)$.
- d) Să se deducă inegalitatea $e^x \geq x^e$, $(\forall) x \in (0, \infty)$.
- e) Să se demonstreze că $e^x > \frac{x^{e+1}}{e+1} + 1$, $(\forall) x \in (0, \infty)$.

Varianta 2

SUBIECTUL I

- Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X + 2$.
 - Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X - 1$.
 - Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $f(x) = 0$.
 - Să se rezolve ecuația $(\log_3 x)^3 - \log_3 x^3 + 2 = 0$, $x > 0$.
- Se consideră șirul cu termenul general $a_n = \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdot \dots \cdot \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x + 1$.
 - Să se verifice identitatea $\frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} = \frac{x - 1}{x + 1} \cdot \frac{f(x + 1)}{f(x)}$, $(\forall) x \neq -1$.
 - Să se arate că $a_n = \frac{2(n^2 + n + 1)}{3n(n + 1)}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
 - Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
 - Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3a_n}{2} \right)^{n^2}$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2, 1)$, $B(-1, -2)$ și $C(-1, 1)$.
 - Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC .
 - Să se calculeze panta dreptei AC .
 - Să se scrie ecuația dreptei AB .

SUBIECTUL II

- În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$.
 - Să se calculeze determinantul matricei A .
 - Să se calculeze A^2 și A^4 .
 - Să se determine o matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$ pentru care $AB = BA = I_2$.
 - Să se calculeze A^{2001} .
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax - \sin x$, unde a este parametru real.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $f(0)$ și $f'(0)$.
 - Pentru $a \geq 1$, să se arate că $f(x) \geq 0$, $(\forall) x \geq 0$.
 - Să se arate că $\int_0^1 \sin(x^2) dx \leq \frac{1}{3}$.

SUBIECTUL III

Se consideră mulțimea de numere reale $M = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q} \text{ și } a^2 - 2b^2 = 1\}$.

- Să se arate că dacă $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$ cu $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, atunci $a = c$ și $b = d$.
- Să verifice că $1 \in M$.
- Să se arate că M este parte stabilă în raport cu înmulțirea numerelor reale.
- Să se arate că dacă $z \in M$, atunci $z \neq 0$ și $\frac{1}{z} \in M$.

- e) Să se găsească un element $z \in M$ astfel încât $0 < z < \frac{1}{10}$.

SUBIECTUL IV

Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 0}$, definit prin $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx$ și $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 1} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Să se calculeze I_0 și I_1 .
- b) Să se verifice relația $I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- c) Să se arate că $I_n \geq I_{n+1}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
- d) Să se deducă inegalitățile $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
- e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$.
- f) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(nI_n - \frac{1}{2} \right) \ln n$.

Varianta 3

SUBIECTUL I

- Se consideră polinomul $f = X^4 - X + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.
 - Să se verifice că $f(X) = \left(X^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$.
 - Să se arate că $f(x) \geq \frac{1}{2}$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că polinomul f nu are rădăcini reale.
 - Să se calculeze $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ și $T = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 1)e^x$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .
 - Să se deducă inegalitatea $f(x) \geq -1$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1,0)$, $B(0,1)$ și $C(-1,0)$.
 - Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC .
 - Să se scrie ecuația dreptei AB .
 - Să se verifice că $OA = OB = OC$, unde $O(0,0)$ este originea sistemului de coordonate.

SUBIECTUL II

- Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.
 - Să se calculeze determinantul și rangul matricei A .
 - Să se calculeze A^2 .
 - Să se arate că $A + 2A^2 + \dots + 2001A^{2001} = 1001A$.
- Să se verifice identitatea $\frac{3x^2 + 3x + 1}{x^3(x+1)^3} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+1)^3}$, $(\forall) x > 0$.
Notăm cu $a_n = \frac{3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1}{1^3 \cdot 2^3} + \frac{3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1}{2^3 \cdot 3^3} + \dots + \frac{3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1}{n^3 \cdot (n+1)^3}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
 - Să se arate că $a_n = \frac{(n+1)^3 - 1}{(n+1)^3}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
 - Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
 - Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{n^3}$.

SUBIECTUL III

Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție "o" definită prin $x \circ y = 2xy + 6x + 6y + 15$.

- Să se verifice că $x \circ y = 2(x+3)(y+3) - 3$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$.
- Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R}$.
- Să se verifice că $x \circ (-3) = (-3) \circ x = -3$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
- Să se arate că $(-15) \circ (-14) \circ \dots \circ 0 \circ 1 \circ \dots \circ 14 \circ 15 < -1$.

- e) Să se stabilească dacă mulțimea $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ este parte stabilă în raport cu legea "o". Justificați răspunsul.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$ și șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $a_n = \frac{1}{1+1^2} + \frac{1}{1+2^2} + \dots + \frac{1}{1+n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- b) Să se arate că funcția f' este strict descrescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.
- c) Aplicând teorema lui Lagrange, să se arate că $\frac{1}{1+(k+1)^2} < \operatorname{arctg}(k+1) - \operatorname{arctg} k < \frac{1}{1+k^2}$, $(\forall) k \in \mathbb{N}$.
- d) Să se arate că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este strict crescător.
- e) Utilizând rezultatul de la punctul c), să se arate că $a_n < \frac{\pi}{2}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

Varianta 4

SUBIECTUL I

- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + m$, unde m este un parametru real.
 - Să se determine punctul de minim și valoarea minimă a funcției f .
 - Să se determine valorile lui m pentru care $f(x) \geq 2$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Pentru $m = 1$, să se rezolve ecuația $(f \circ f)(x) = 0$.
- Să se verifice identitatea $\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$, $(\forall) x > 0$.
Notăm cu $a_n = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
 - Să se arate că $a_n = \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
 - Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
 - Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(0,1)$, $B(2,2)$, $C(0,4)$.
 - Să se scrie ecuația dreptei AB .
 - Să se determine panta dreptei AB .
 - Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC .

SUBIECTUL II

- Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X + 1$.
 - Să se calculeze $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$ și $f(2)$.
 - Să se arate că polinomul f are toate rădăcinile reale.
 - Să se demonstreze că rădăcinile polinomului f sunt numere iraționale.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x - ax - 1$, unde a este parametru real.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $f(0)$ și $f'(0)$.
 - Să se determine valorile lui a pentru care $f(x) \geq 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Să se deducă inegalitatea $\int_0^1 2^{x^2} dx \geq 1 + \frac{\ln 2}{3}$.

SUBIECTUL III

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, precum și submulțimea $G = \{X(a) \mid a \in \mathbb{R} \text{ și } X(a) = I_2 + aA\}$.

- Să se calculeze determinantul și rangul matricei A .
- Să se calculeze A^2 .
- Să se arate că $I_2 \in G$.
- Să se demonstreze că $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + ab)$, $(\forall) a, b \in \mathbb{R}$.
- Să se demonstreze că $X(1) \cdot X(2) \cdot \dots \cdot X(2001) = X(2002! - 1)$.

SUBIECTUL IV

Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 0}$ definit prin $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{2x+3} dx$ și $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{2x+3} dx$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Să se calculeze I_0 și I_1 .
- b) Să se arate că $2I_{n+1} + 3I_n = \frac{1}{n+1}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
- c) Dacă $x \in [0, 1]$, să se arate că $x^n \geq x^{n+1}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
- d) Să se arate că $I_n \geq I_{n+1}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
- e) Să se deducă inegalitățile $\frac{1}{5(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{5n}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
- f) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$.

Varianta 5

SUBIECTUL I

- Se consideră polinomul $f = X^3 + 4X^2 - 20X - 48$.
 - Să se calculeze $f(-2)$.
 - Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{C}$.
 - Să se rezolve ecuația $8^x + 4 \cdot 4^x - 20 \cdot 2^x - 48 = 0$, $x \in \mathbb{R}$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x - 1$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .
 - Să se deducă inegalitatea $f(x) \geq 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că $\int_0^1 e^{-x^2} dx \geq \frac{2}{3}$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(n, n^2)$, $n \in \mathbb{N}$.
 - Să se determine coordonatele punctelor A_0, A_1, A_2 .
 - Să se calculeze perimetrul triunghiului $A_0A_1A_2$.
 - Să se determine panta dreptei A_7A_8 .

SUBIECTUL II

- În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ se consideră submulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.
 - Să se verifice că $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.
 - Să se arate că dacă $A, B \in G$, atunci $A \cdot B \in G$.
 - Să se arate că dacă $A \in G$ și $\text{rang}(A) < 2$, atunci $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
 - Să se arate că dacă $A \in G$ și $\det(A) = 1$, atunci $A^4 = I_2$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$.
 - Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, pentru care $\frac{x}{(x+1)(x+4)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+4}$, $(\forall) x > 0$.
 - Să se calculeze $\int \frac{x}{x^2 + \alpha^2} dx$, unde $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
 - Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinsă între graficul funcției f și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

SUBIECTUL III

Se consideră polinomul $f = (X + 1)^{2n+1} + (X - 1)^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, cu forma algebrică $f = a_{2n+1}X^{2n+1} + a_{2n}X^{2n} + \dots + a_1X + a_0$ și cu rădăcinile $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1} \in \mathbb{C}$.

- Să se calculeze a_0 .
- Să se determine suma coeficienților polinomului f .
- Să se calculeze a_{2n} și a_{2n-1} .
- Să se calculeze $S = x_1 + x_2 + \dots + x_{2n+1}$ și $T = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2n+1}^2$.
Considerăm $z = a + ib$ o rădăcină complexă a polinomului f , unde $a, b \in \mathbb{R}$.

e) Să se arate că $|a + 1 + ib| = |a - 1 + ib|$.

f) Să se arate că $a = 0$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$.

a) Să se verifice că $f(x) = x + 2 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$, $(\forall) x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) Să se determine asimptotele la graficul funcției f .

c) Să se demonstreze, folosind metoda inducției matematice, că $\left(\frac{1}{x-a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$ și $x \neq a$.

d) Să se calculeze $f^{(n)}(x)$, $x \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \int_2^n f(x) dx$.

SESIUNEA IUNIE-IULIE

Varianta 1

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv real

SUBIECTUL I

- Se consideră polinomul $f = X^3 - X + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ și polinomul $g = X^2 + X + 1$, cu rădăcinile $y_1, y_2 \in \mathbb{C}$.
 - Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul g .
 - Să se verifice că $y_1^3 = y_2^3 = 1$.
 - Să se arate că numărul $a = f(y_1) + f(y_2)$ este natural.
 - Să se calculeze $b = g(x_1) + g(x_2) + g(x_3)$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .
 - Să se deducă inegalitatea $f(x) \geq 1$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că $\int_0^1 e^{x^2} dx \geq \frac{4}{3}$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(-1,-1)$ și $C(1,-1)$.
 - Să se calculeze panta dreptei AB .
 - Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC .
 - Să se scrie ecuația dreptei AC .

SUBIECTUL II

- Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție "o" definită prin $x \circ y = x + y + \sqrt{2}$.
 - Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R}$.
 - Să se determine numărul real e astfel încât $x \circ e = e \circ x = x$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Să se precizeze dacă mulțimea $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ este parte stabilă în raport cu legea "o". Justificați răspunsul.
- Să se verifice identitatea $\frac{3x^2 + 3x + 1}{x^3(x+1)^3} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+1)^3}$, $(\forall) x > 0$.
Notăm cu $a_n = \frac{3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1}{1^3 \cdot 2^3} + \frac{3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1}{2^3 \cdot 3^3} + \dots + \frac{3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1}{n^3 \cdot (n+1)^3}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
 - Să se arate că $a_n = \frac{(n+1)^3 - 1}{(n+1)^3}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
 - Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
 - Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{n^3}$.

SUBIECTUL III

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Să se calculeze determinantul și rangul matricei A .

- b) Să se calculeze A^2 .
- c) Să se verifice identitatea $I_3 = (I_3 - A)(I_3 + A)$.
- d) Să se arate că matricea $I_3 - A$ este inversabilă și să se calculeze inversa ei.
- e) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $(I_3 + A)^n = I_3 + nA$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \arctg x$.

- a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- b) Să se calculeze $f(0)$ și $f'(0)$.
- c) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe \mathbb{R} .
- d) Să se determine asimptota la ramura spre $+\infty$ a graficului funcției f .
- e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt$.

Varianta 2

SUBIECTUL I

- Se consideră ecuația $x^2 - mx + m - 1 = 0$, unde m este un parametru real.
 - Să se determine m astfel încât ecuația să aibă rădăcini reale.
 - Să se determine m astfel încât ecuația să aibă rădăcini opuse.
 - Să se determine m astfel încât ecuația să aibă rădăcini inverse.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1)^4 - x^4$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe \mathbb{R} .
 - Să se determine punctul de inflexiune al graficului funcției f .
 - Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(3, 3)$ și $C(-1, 2)$.
 - Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC .
 - Să se calculeze panta dreptei AB .
 - Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctul C și are aceeași pantă cu dreapta AB .

SUBIECTUL II

- Se consideră sistemul
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + 3z = 6 \\ x + 3y + 5z = 9 \end{cases}$$
. Notăm cu A matricea sistemului.
 - Să se calculeze determinantul și rangul matricei A .
 - Să se arate că sistemul este compatibil nedeterminat.
 - Să se determine acele soluții (x, y, z) ale sistemului pentru care $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3^x - ax - 1$, unde a este parametru real.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $f(0)$ și $f'(0)$.
 - Să se determine $a \in \mathbb{R}$, pentru care $f(x) \geq 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, precum și submulțimea $G = \{X(a) \mid a \in \mathbb{R} \text{ și } X(a) = I_2 + aA\}$.

- Să se calculeze A^2 .
- Să se verifice că $I_2 \in G$.
- Să se demonstreze că $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + ab)$, $(\forall) a, b \in \mathbb{R}$.
- Să se verifice că $X(a) \cdot X(-1) = X(-1)$, $(\forall) a \in \mathbb{R}$.
- Să se determine numărul $t \in \mathbb{R}$ pentru care $X(-100) \cdot X(-99) \cdot \dots \cdot X(99) \cdot X(100) = X(t)$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x - x + \frac{x^3}{3}$ și $g(x) = \operatorname{arctg} x - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}$.

- a) Să se calculeze $f'(x)$ și $g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- b) Să se calculeze $f(0)$ și $g(0)$
- c) Să se arate că $f'(x) \geq 0$ și $g'(x) \leq 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
- d) Să se arate că $f(x) > 0$ și $g(x) < 0$, $(\forall) x > 0$.
- e) Să se demonstreze că $\frac{2}{7} < \int_0^1 \operatorname{arctg}(x^2) dx < \frac{31}{100}$.

Varianta 3

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul $f = X^3 + aX + b$, cu a și b parametri reali.
 - a) Să se determine a și b , știind că polinomul f se divide cu $X + 1$ și că $f(1) = 4$.
 - b) Pentru $a = 1$ și $b = 2$ să se rezolve ecuația $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{C}$.
 - c) Pentru $a = 1$ și $b = 2$ să se rezolve inecuația $f(x) < 0$, $x \in \mathbb{R}$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$.
 - a) Să se verifice că $f(-x) = f(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - b) Să se determine asimptotele la graficul funcției f .
 - c) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(0, 3)$, $B(3, 0)$ și $C(4, 4)$.
 - a) Să se calculeze panta dreptei AC .
 - b) Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC .
 - c) Să se scrie ecuația dreptei AB .

SUBIECTUL II

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
 - a) Să se verifice că $A^2 = 5A$.
 - b) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $A^n = 5^{n-1}A$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
 - c) Să se arate că matricea $A - A^2 + A^3 + \dots + (-1)^{99}A^{100}$ are toate elementele strict negative.
2. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.
 - a) Să se calculeze $f(1)$.
 - b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.
 - c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

SUBIECTUL III

Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție "o" definită prin $x \circ y = xy + x + y$.

- a) Să se verifice că $x \circ y = (x + 1)(y + 1) - 1$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$.
- b) Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R}$.
- c) Să se verifice că $x \circ (-1) = (-1) \circ x = -1$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
- d) Să se stabilească dacă mulțimea $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ este parte stabilă în raport cu legea "o". Justificați răspunsul.
- e) Să se rezolve ecuația $x \circ x \circ x \circ x = -1$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcțiile $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0(x) = 1$ și $f_{n+1}(x) = \int_2^x f_n(t) dt$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$ și $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Să se arate că $f_1(x) = x - 2$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

- b)** Să se verifice că $f_2(x) = \frac{(x-2)^2}{2!}$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
- c)** Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $f_n(x) = \frac{(x-2)^n}{n!}$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$ și $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
- d)** Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(100)$.
- e)** Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_0(3) + f_1(3) + \dots + f_n(3)}{n}$.

Varianta 4

SUBIECTUL I

- Se consideră polinomul $f = X^3 + X + m$, unde m este un parametru real.
 - Să se determine numărul real m , știind că polinomul f se divide cu polinomul $X + 1$.
 - Pentru $m = 2$ să se rezolve ecuația $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{C}$.
 - Pentru $m = 2$, să se rezolve inecuația $f(x) < 0$, $x \in \mathbb{R}$.
- Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x + 2) - \ln x$
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.
 - Să se arate că $f'(x) < 0$ și $f(x) > 0$, $(\forall) x > 0$.
 - Să se determine asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției f .
 - Să se calculeze $\int_1^e f(x) dx$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(n, n^2)$, $n \in \mathbb{N}$.
 - Să se scrie ecuația dreptei A_0A_1 .
 - Să se calculeze lungimea segmentului A_0A_1 .
 - Să se arate că panta dreptei A_nA_{n+1} este un număr natural impar, $(\forall) n \in \mathbb{N}$.

SUBIECTUL II

- Se consideră sistemul
$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + 3z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$
, unde a este parametru real.
 - Să se calculeze determinantul matricei sistemului.
 - Să se determine valorile lui a pentru care sistemul este compatibil determinat.
 - Să se stabilească dacă sistemul este compatibil pentru $a = -2$. Justificați răspunsul.
- Se consideră șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $a_n = \frac{1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n!}{(n+1)!}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
 - Să se verifice identitatea $k \cdot k! = (k+1)! - k!$, $(\forall) k \in \mathbb{N}$.
 - Să se arate că $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
 - Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
 - Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{(n+1)!}$.

SUBIECTUL III

Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție "o" definită prin $x \circ y = x + y + \sqrt{5}$.

- Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R}$.
- Să se determine numărul real e pentru care $x \circ e = e \circ x = x$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
- Să se rezolve ecuația $2^x \circ 4^x = 6 + \sqrt{5}$, $x \in \mathbb{R}$.
- Să se stabilească dacă mulțimea $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ este parte stabilă în raport cu legea "o". Justificați răspunsul.
- Se consideră numărul $a = \sqrt{5} \circ (-2\sqrt{5}) \circ (3\sqrt{5}) \circ \dots \circ (19\sqrt{5}) \circ (-20\sqrt{5})$. Să se arate că $20 < a < 21$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2^x$.

- a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- b) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe \mathbb{R} .
- c) Să se calculeze $f''(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- d) Să se arate că funcția f este convexă pe \mathbb{R} .
- e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(1) + f(2) + \dots + f(n)}{2^n}$.

Varianta 5

SUBIECTUL I

- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 2$.
 - Să se arate că $f(x) \geq 1$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Să se rezolve ecuația $(f \circ f)(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se găsească un număr irațional a pentru care $f(a) \in \mathbb{Q}$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$.
 - Să se calculeze $f(0)$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că $f(x) \geq 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că $x \geq \operatorname{arctg} x$, $(\forall) x \geq 0$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(4n - 3, 3n - 2)$, $n \in \mathbb{N}$.
 - Să se scrie ecuația dreptei A_0A_1 .
 - Să se calculeze lungimea segmentului A_0A_1 .
 - Să se arate că panta dreptei A_nA_{n+1} nu depinde de n , $(\forall) n \in \mathbb{N}$.

SUBIECTUL II

- Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.
 - Să se calculeze determinantul și rangul matricei A .
 - Să se calculeze A^2 .
 - Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $A + 2^2A^2 + \dots + n^2A^n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}A$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
- Se consideră șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $a_n = \frac{2 \cdot 1 + 1}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{2 \cdot 2 + 1}{2^2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{2 \cdot n + 1}{n^2 \cdot (n+1)^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
 - Să se verifice identitatea $\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$, $(\forall) k \in \mathbb{N}^*$.
 - Să se arate că $a_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
 - Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
 - Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{n^2}$.

SUBIECTUL III

Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție "o" definită prin $x \circ y = -xy - x - y - 2$.

- Să se verifice că $x \circ y = -(x+1)(y+1) - 1$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$.
- Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R}$.
- Să se verifice că $x \circ (-1) = (-1) \circ x = -1$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
- Să se arate că $(-20) \circ (-19) \circ \dots \circ 0 \circ 1 \circ \dots \circ 19 \circ 20 < 0$.
- Să se stabilească dacă mulțimea $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ este parte stabilă în raport cu legea "o". Justificați răspunsul.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)}$.

- a) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, pentru care $\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$, $(\forall) x > 0$.
- b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- c) Să se arate că $0 < f(x) \leq \frac{1}{2}$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
- d) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- e) Să se determine asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- f) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(f(\sqrt{1}) + f(\sqrt{2}) + \dots + f(\sqrt{n}) \right)$.

SESIUNEA IUNIE-IULIE

Varianta 1

Profilul pedagogic

SUBIECTUL I

- Un autoturism A care consumă motorină este cu 40000000 lei mai scump decât un autoturism B care consumă benzină. Un litru de benzină costă 15000 lei, iar un litru de motorină costă 13000 lei. Un autoturism A consumă 5 litri de motorină la 100 km, iar un autoturism B consumă 7 litri de benzină la 100 km.
 - Să se determine cât costă motorina consumată de autoturismul A la 100 km.
 - Să se determine cât costă benzina consumată de autoturismul B la 100 km.
 - Să se afle după câți km prețul autoturismului A adunat cu costul motorinei consumate de el este același cu prețul autoturismului B adunat cu costul benzinei consumate de el.
- Numărul 1000 se mărește cu 10% din valoarea sa și se obține numărul a . Numărul a se micșorează cu 10% din valoarea sa și se obține numărul b .
 - Să se calculeze a .
 - Să se calculeze b .
 - Cu ce procent trebuie micșorat numărul 1000, pentru a se obține numărul b ?
- Scierea zecimală a numărului $\frac{1}{37}$ este $0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$
 - Să se determine cifrele a_1 și a_2 .
 - Să se determine cifra a_{2001} .
 - Să se calculeze $S = a_1 + a_2 + \dots + a_{2001}$.

SUBIECTUL II

- Se consideră polinomul $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ și polinomul $g = X^2 + X + 1$ cu rădăcinile $y_1, y_2 \in \mathbb{C}$.
 - Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul g .
 - Să se verifice că $y_1^3 = y_2^3 = 1$.
 - Să se arate că numărul $A = g(x_1) + g(x_2) + g(x_3) + g(x_4)$ este întreg.
- Se consideră binomul $(1 + \sqrt{2})^{100}$.
 - Să se scrie termenul din mijloc al dezvoltării binomului.
 - Să se determine numărul de termeni raționali din dezvoltarea binomului.
 - Notăm cu S suma termenilor raționali și cu T suma termenilor iraționali ai binomului. Să se demonstreze că $S > T$.

SUBIECTUL III

- Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
 - Să se verifice că $A^2 = 6A$.
 - Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $A^n = 6^{n-1}A$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
 - Să se arate că $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2001} = \frac{6^{2001} - 1}{5}A$.

2. a) Să se arate că dacă $0 < x < 1$, atunci avem inegalitățile $x < \sqrt{x} < 1$.
- b) Să se determine primele 20 de zecimale ale numărului \sqrt{x} , unde $x = 1 - \frac{1}{10^{20}}$.

SUBIECTUL IV

Piramida patrulateră regulată cu vârful V și baza $ABCD$ are $VA = AB = a$.

- a) Să se calculeze apotema piramidei.
- b) Să se calculeze aria laterală a piramidei.
- c) Să se calculeze înălțimea piramidei.
- d) Să se calculeze volumul piramidei.
- e) Să se arate că muchiile VA și VC sunt perpendiculare.
- f) Fie punctul $P \in (VC)$. Să se determine lungimea segmentului PC , astfel încât perimetrul triunghiului BPD să fie minim.

Varianta 2

SUBIECTUL I

- Un copac cu înălțimea de 10 m crește în fiecare lună cu 4% din înălțimea sa.
 - Ce înălțime va avea copacul după o lună?
 - Ce înălțime va avea copacul după două luni?
 - Să se arate că după 20 de luni, copacul va avea o înălțime mai mare de 20 m.
- Care este cel mai mic număr natural care, scris în baza zece, are 4 cifre?
 - Care este cel mai mare număr natural care, scris în baza zece, are 6 cifre?
 - Să se demonstreze că numărul 2^{100} scris în baza zece are exact 31 de cifre.
- Să se verifice identitatea $\frac{1}{x^3 - x} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(x-1)x} - \frac{1}{x(x+1)} \right)$, $(\forall) x > 1$.
 - Să se arate că $\frac{1}{k^3} < \frac{1}{k^3 - k}$, $(\forall) k > 1$.
 - Notăm cu $a_n = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^3}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Să se demonstreze că $1 \leq a_n < \frac{5}{4}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL II

- Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$.
 - Să se calculeze determinantul matricei A .
 - Să se verifice că $A^2 = 8A$.
 - Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $A^n = 8^{n-1}A$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
- Se consideră polinomul $f = X^4 - X^2 + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ și polinomul $g = X^2 - X + 1$ cu rădăcinile $y_1, y_2 \in \mathbb{C}$.
 - Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul g .
 - Să se verifice că $y_1^3 = y_2^3 = -1$.
 - Să se arate că numărul $B = g(x_1)g(x_2)g(x_3)g(x_4)$ este întreg.

SUBIECTUL III

- Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție "o" definită prin $x \circ y = x + y + 1$.
 - Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R}$.
 - Să se determine numărul real e pentru care $x \circ e = e \circ x = x$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că numărul $1 \circ 2 \circ 3 \circ \dots \circ 2001$ nu este pătratul unui număr natural.
 - Să se stabilească dacă mulțimea $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ este parte stabilă în raport cu legea "o". Justificați răspunsul.
- Să se arate că în orice mulțime de patru numere întregi există două care au suma sau diferența divizibilă cu 5.

SUBIECTUL IV

Cubul $ABCD A' B' C' D'$ are muchia de lungime a .

- Să se calculeze aria totală a cubului.
- Să se calculeze lungimea segmentului AC' .

- c) Să se calculeze volumul tetraedrului $B'ABC$.
- d) Să se calculeze volumul tetraedrului $ACB'D'$.
- e) Să se calculeze distanța de la punctul A la planul $(CD'B')$.
- f) Notăm cu O centrul feței $BCC'B'$. Să se afle lungimea minimă pe care o are un drum dintre A și O pe suprafața cubului.

Varianta 3

SUBIECTUL I

- Trei tractoriști au de arat împreună o suprafață de 130 de ha. După ce primul a arat două treimi din suprafața sa, al doilea a arat trei sferturi din suprafața sa, iar al treilea a arat două cincimi din suprafața sa, toți au rămas cu suprafețe egale de arat.
 - Ce procent din suprafața pe care trebuia să o are al doilea tractorist reprezintă suprafața pe care trebuia să o are primul tractorist?
 - Ce suprafață trebuia să are fiecare tractorist?
 - Ce suprafață a arat fiecare tractorist?
- Se consideră numărul $a = 31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot \dots \cdot 60$.
 - Să se determine cel mai mare număr natural n pentru care 2^n divide numărul a .
 - Care este numărul de zerouri cu care se termină numărul a scris în baza zece?
 - Să se demonstreze că numărul a nu este pătrat perfect.
- Fie suma $S = \frac{1}{39} + \frac{1}{40} + \dots + \frac{1}{50}$.
 - Câți termeni are suma S ?
 - Să se arate că $\frac{6}{25} < S < \frac{4}{13}$.
 - Dacă $\frac{1}{39} + \frac{1}{40} + \dots + \frac{1}{50} = \frac{a}{b}$, cu $a, b \in \mathbb{N}^*$ prime între ele, să se arate că b este număr par și că a se divide cu 89.

SUBIECTUL II

- Să se verifice identitatea $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$, $(\forall) a, b, c \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că $2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$, $(\forall) a, b, c \in \mathbb{R}$.
 - Să se rezolve ecuația $8^x + 27^x + 125^x = 3 \cdot 30^x$, $x \in \mathbb{R}$.
- Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție "o" definită prin $x \circ y = x + y - 10$.
 - Să se arate că Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R}$.
 - Să se determine numărul real e pentru care $x \circ e = e \circ x = x$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate, utilizând metoda inducției matematice, că $2 \circ 2^2 \circ 2^3 \circ \dots \circ 2^n = 2^{n+1} - 10n + 8$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
 - Să se stabilească dacă mulțimea $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ este parte stabilă în raport cu legea "o". Justificați răspunsul.

SUBIECTUL III

- Se consideră polinomul $f = (X + i)^{10} + (X - i)^{10}$ având forma algebrică $f = a_{10}X^{10} + a_9X^9 + \dots + a_1X + a_0$.
 - Să se calculeze a_0 .
 - Să se determine a_{10}, a_9, a_8 .
 - Să se calculeze suma coeficienților polinomului f .
 - Să se arate că polinomul f are toți coeficienții reali.
 - Se consideră z o rădăcină complexă a polinomului f . Să se arate că $|z + i| = |z - i|$.
 - Să se arate că polinomul f are toate rădăcinile reale.
- Să se demonstreze că numărul $50!$ nu este nici pătrat perfect, nici cub perfect.

SUBIECTUL IV

Se consideră piramida triunghiulară regulată cu vârful A și baza BCD . Se știe că $AB = BC = a$.

a) Să se calculeze aria totală a piramidei.

b) Să se calculeze înălțimea piramidei.

c) Să se calculeze volumul piramidei.

Fie A' , B' , C' , D' centrele de greutate ale triunghiurilor BCD , ACD , ABD și respectiv ABC .

d) Să se demonstreze că dreptele AA' , BB' , CC' și DD' sunt concurente.

e) Notăm punctul de concurență al dreptelor AA' , BB' , CC' și DD' cu G . Să se arate că $GA = 3GA'$.

Varianta 4

SUBIECTUL I

- Un călător are de parcurs un traseu lung de 1275 km. În prima zi el parcurge 1 km, în a doua zi parcurge 2 km, ..., în a n -a zi parcurge n km.
 - Câți km a parcurs călătorul după primele 3 zile?
 - Câți km a parcurs călătorul după primele 7 zile?
 - După câte zile parcurge călătorul tot traseul?
- Se consideră numerele $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 25$ și $b = 26 \cdot 27 \cdot \dots \cdot 50$.
 - Să se arate că numărul a nu este pătrat perfect.
 - Să se determine cel mai mic număr natural n pentru care 10^n divide a .
 - Să se demonstreze că $\frac{b}{a}$ este număr natural.
- Se consideră mulțimea A formată din numere naturale care împărțite la 3, 4 respectiv 5 dau resturile 2, 3 respectiv 4.
 - Să se arate că dacă $a \in A$, atunci 60 divide $a + 1$.
 - Să se determine cel mai mic element din mulțimea A .
 - Să se determine elementele din mulțimea A conținute în intervalul $(100, 200)$.

SUBIECTUL II

- Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
 - Să se calculeze determinantul matricei A .
 - Să se verifice că $A^2 = -A$.
 - Să se determine numărul întreg x , pentru care $A + 2A^2 + \dots + 2001A^{2001} = xA$.
- Se consideră polinomul $f = (X + i)^5 - (X - i)^5$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.
 - Să se verifice că $f = 2i(5X^4 - 10X^2 + 1)$.
 - Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.
 - Să se calculeze $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ și $T = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.

SUBIECTUL III

- Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție "o" definită prin $x \circ y = xy + x + y$.
 - Să se verifice că $x \circ y = (x + 1)(y + 1) - 1$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că $x \circ (-1) = -1$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $(-2001) \circ (-2000) \circ \dots \circ 0 \circ 1 \circ 2 \circ \dots \circ 2000 \circ 2001$.
 - Să se stabilească dacă mulțimea $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ este parte stabilă în raport cu legea "o". Justificați răspunsul.
- Să se arate că dacă $p > 2$ și $q > 2$ sunt numere prime consecutive, atunci numărul $\frac{p+q}{2}$ este natural și nu este prim.

SUBIECTUL IV

Se consideră piramida regulată cu vârful V și baza ABC . Se știe că $VA = 2a$ și $m(\sphericalangle AVB) = 30^\circ$.

- a) Să se calculeze lungimea înălțimii din A a triunghiului AVB .
- b) Să se calculeze lungimea segmentului AB .
- c) Să se calculeze apotema piramidei.
- d) Să se calculeze aria totală a piramidei.
- e) Fie punctele $M \in (VA)$, $N \in (VB)$ și $P \in (VC)$, astfel încât $VM = MA$ și perimetrul triunghiului MNP să fie minim. Să se calculeze perimetrul triunghiului MNP .

Varianta 5

SUBIECTUL I

- Trei muncitori A , B și C efectuează o lucrare. Dacă muncitorii A și B lucrează împreună, termină lucrarea în 12 zile, dacă muncitorii B și C lucrează împreună, termină lucrarea în 20 zile, iar dacă muncitorii A și C lucrează împreună, termină lucrarea în 15 zile.
 - În câte zile ar termina lucrarea fiecare muncitor dacă ar lucra singur?
 - În câte zile ar termina lucrarea cei trei muncitori dacă ar lucra împreună?
 - Pentru o zi de muncă lucrată împreună ei primesc în total 600000 de lei. Ce sumă revine fiecărui muncitor zilnic, știind că ei sunt plătiți direct proporțional cu munca prestată?
- Să se arate că $\frac{1}{2} < \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{19} < 1$.
 - Dacă $\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{19} = \frac{a}{b}$, cu $a, b \in \mathbb{N}^*$ prime între ele, să se arate că b este par și a este impar.
 - Să se arate că a se divide cu 29.
- Notăm cu A mulțimea numerelor naturale de 4 cifre distincte, formate cu cifrele 2, 3, 5 și 6.
 - Câte elemente are mulțimea A ?
 - Câte elemente ale mulțimii A sunt numere pare?
 - Să se calculeze suma numerelor impare din mulțimea A .

SUBIECTUL II

- Se consideră polinomul $f = X^9 + (X + 1)^6$ având forma algebrică $f = a_9X^9 + a_8X^8 + \dots + a_1X + a_0$ și polinomul $g = X^2 + X + 1$ cu rădăcinile $y_1, y_2 \in \mathbb{C}$.
 - Să se calculeze suma coeficienților polinomului f .
 - Să se verifice că $y_1^3 = y_2^3 = 1$.
 - Să se calculeze $f(y_1)$ și $f(y_2)$.
 - Să se arate că $a_0 + a_3 + a_6 + a_9 = \frac{f(1) + f(y_1) + f(y_2)}{3}$.
- Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.
 - Să se verifice că $AB = BA$.
 - Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $(A - B)^n = A^n + (-1)^n B^n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
 - Să se calculeze $(A + B)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL III

- Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție "o" definită prin $x \circ y = -xy + x + y$.
 - Să se verifice că $x \circ y = -(x - 1)(y - 1) + 1$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că $x \circ 1 = 1 \circ x = 1$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $(-20) \circ (-19) \circ \dots \circ 0 \circ 1 \circ 2 \circ \dots \circ 19 \circ 20$.
 - Să se stabilească dacă mulțimea $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ este parte stabilă în raport cu legea "o". Justificați răspunsul.
- Să se arate că un produs de trei numere naturale nenule consecutive nu este cub perfect.

SUBIECTUL IV

Se consideră piramida triunghiulară regulată cu vârful A și baza BCD . Se știe că $AB = 5$ și $BC = 5\sqrt{2}$.

a) Să se arate că AB este perpendiculară pe dreapta AC .

b) Să se calculeze aria totală a piramidei.

c) Să se calculeze volumul piramidei.

Fie punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ și $P \in (AD)$, astfel încât $AM = 1$, $AN = 2$ și $AP = 3$.

d) Să se calculeze perimetrul triunghiului MNP .

e) Să se calculeze volumul corpului $MNPBCD$.

SESIUNEA IUNIE-IULIE

Varianta 1

Profilul uman

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul $f = X^3 - X^2 + aX + b$, unde a și b sunt parametri reali.
 - a) Să se determine a și b , știind că polinomul $X - 1$ divide pe f și $f(-1) = -4$.
 - b) Se consideră polinomul $g = X^3 - X^2 + X - 1$. Să se rezolve în \mathbb{C} ecuația $g(x) = 0$.
 - c) Să se afle câtul și restul împărțirii polinomului g la polinomul $X^2 + X$.
 - d) Să se afle câte valori reale poate lua expresia $E = x_1^2 + x_2 + x_3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului g , permutate în toate modurile.
 - e) Să se rezolve ecuația $g(2^x) = 0$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1)^3 - x^3$.
 - a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - b) Să se studieze semnul funcției f' .
 - c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .
 - d) Să se arate că funcția f este convexă pe \mathbb{R} .
 - e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(0) + f(1) + \dots + f(n)}{n^3}$.

SUBIECTUL II

Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție "o" definită prin $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$.

- a) Să se verifice că $x \circ y = (x + 2)(y + 2) - 2$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$.
- b) Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R}$.
- c) Să se determine numărul real e pentru care $x \circ e = e \circ x = x$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
- d) Să se arate că $x \circ (-2) = (-2) \circ x = -2$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
- e) Să se stabilească dacă mulțimea $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ este parte stabilă în raport cu legea "o". Justificați răspunsul.

SUBIECTUL III

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x - 5}{x^2 - 3x + 2}$.

- a) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ să avem $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$.
- b) Să se determine primitivele funcției f pe intervalul $(2, \infty)$.
- c) Să se determine asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- d) Să se determine asimptotele verticale la graficul funcției f .
- e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_3^n f(x) dx$.

SUBIECTUL IV

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Să se calculeze determinantul matricei A .
- b) Să se verifice că $A^2 = 2A$.
- c) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $A^n = 2^{n-1}A$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
- d) Să se arate că $A + A^2 + \dots + A^{2001} = (2^{2001} - 1)A$.
- e) Să se calculeze $(A - I_2)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Varianta 2

SUBIECTUL I

- Se consideră polinomul $f = X^2 + 2X + 4$ cu rădăcinile $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$.
 - Să se arate că polinomul f divide polinomul $X^3 - 8$.
 - Să se arate că $x_1^3 = x_2^3 = 8$.
 - Să se găsească o valoare $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, pentru care $f(a) \in \mathbb{N}$.
 - Dacă z este o rădăcină a polinomului f , să se calculeze $A = z^{20} + 2z^{19} + 2^2 z^{18} + \dots + 2^{19}z + 2^{20}$.
 - Să se rezolve ecuația $f(2^x) = 7$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, unde a, b și c sunt parametri reali.
 - Să se determine a, b și c astfel încât să fie îndeplinite simultan următoarele condiții: $f(0) = 0$, $f'(1) = -2$ și $\int_0^1 f(x) dx = \frac{2}{3}$.
Considerăm că $a = -1$, $b = 2$ și $c = 0$.
 - Să se calculeze $f''(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .
 - Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(1) + f'(2) + \dots + f'(n)}{n^2}$.

SUBIECTUL II

- Se consideră binomul $(1 + x)^n$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
 - Să se determine n știind că suma coeficienților binomiali este 64.
 - Pentru $n = 6$ să se determine termenul din mijloc al dezvoltării.
 - Să se determine $x \in \mathbb{R}$, știind că $n = 6$ și că termenul care îl conține pe x^2 este egal cu 60.
- Se consideră progresia aritmetică cu termenul general $a_n = 3n + 2$, $n \in \mathbb{N}^*$.
 - Să se determine rația progresiei.
 - Să se verifice identitatea $\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right)$, $(\forall) k \in \mathbb{N}^*$.
 - Să se arate că $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{2000} a_{2001}} = \frac{2000}{a_1 a_{2001}}$.

SUBIECTUL III

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$.

- Să se verifice că $f(x) = x + 2 + \frac{3}{x - 1}$, $(\forall) x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- Să se determine intervalele de convexitate și de concavitate ale funcției f .
- Să se determine asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- Să se arate că $x = 1$ este asimptotă verticală la graficul funcției f .
- Să se calculeze $\int_2^3 f(x) dx$.

SUBIECTUL IV

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, precum și submulțimea $G = \{X(a) \mid a \in \mathbb{R} \text{ și } X(a) = I_2 + aA\}$.

- a) Să se calculeze determinantul matricei $X(a)$, $a \in \mathbb{R}$.
- b) Să se calculeze A^2 .
- c) Să se verifice că $I_2 \in G$.
- d) Să se arate că $X(a) \cdot X(b) = X(a + b - ab)$, $(\forall) a, b \in \mathbb{R}$.
- e) Să se determine $t \in \mathbb{Z}$, astfel încât $X(-10) \cdot X(-9) \cdot \dots \cdot X(9) \cdot X(10) = X(t)$.

Varianta 3

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul $f = aX^3 + bX + c$, unde a, b și c sunt parametri reali.
 - a) Să se determine a, b și c știind că polinomul $X - 1$ divide polinomul f și că polinomul f împărțit la $X^2 + 1$ dă restul $-4X + 2$.
Se consideră polinomul $g = X^3 - 3X + 2$.
 - b) Să se rezolve ecuația $g(x) = 0, x \in \mathbb{C}$.
 - c) Să se determine valoarea maximă a expresiei $E = x_1^2 + x_2 + x_3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului g , permutate în toate modurile.
 - d) Să se rezolve ecuația $g(3^x) = 0$
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.
 - a) Să se verifice că $f(-x) = -f(x), (\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
 - c) Să se calculeze $f'(x), x \in \mathbb{R}$.
 - d) Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x) dx$.
 - e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{2n} f(x) dx$.

SUBIECTUL II

Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție "o" definită prin $x \circ y = -xy + x + y$.

- a) Să se verifice că $x \circ y = -(x - 1)(y - 1) + 1, (\forall) x, y \in \mathbb{R}$.
- b) Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), (\forall) x, y, z \in \mathbb{R}$.
- c) Să se verifice că $x \circ 1 = 1 \circ x = 1, (\forall) x \in \mathbb{R}$.
- d) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că
 $x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n = (-1)^{n-1}(x_1 - 1) \cdot (x_2 - 1) \cdot \dots \cdot (x_n - 1) + 1, (\forall) x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
- e) Să se stabilească dacă mulțimea $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ este parte stabilă în raport cu legea "o". Justificați răspunsul.

SUBIECTUL III

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^3 + 4x - 3$.

- a) Să se verifice că $f(2 - x) = f(2 + x), (\forall) x \in \mathbb{R}$.
- b) Să se calculeze $f'(x), x \in \mathbb{R}$.
- c) Să se arate că funcția f este concavă pe \mathbb{R} .
- d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x)} \int_x^{x+1} f(t) dt$.
- e) Să se determine $a \in (1, 3)$ cu proprietatea că dreapta $x = a$ desparte suprafața plană cuprinsă între graficul funcției f și axa Ox în două regiuni de arii egale.

SUBIECTUL IV

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Să se calculeze determinantul matricei A .
- b) Să se verifice că $A^2 = 3A$.
- c) Să se arate că $A^n = 3^{n-1}A$, (\forall) $n \in \mathbb{N}^*$.
- d) Să se arate că $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2001} = \frac{3^{2001} - 1}{2}A$.
- e) Să se arate că dacă avem trei progresii aritmetice de câte trei termeni: a, b, c , respectiv x, y, z , respectiv u, v, w , atunci determinantul matricei $\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix}$ este egal cu 0.

Varianta 4

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul $f = (X + 1)^{20} + (X - 1)^{20}$ având forma algebrică $f = a_{20}X^{20} + a_{19}X^{19} + \dots + a_1X + a_0$.
 - a) Să se calculeze a_0 , a_1 și a_2 .
 - b) Să se calculeze $f(1)$.
 - c) Să se verifice că $f(-x) = f(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{C}$.
 - d) Să se calculeze $f(i)$.
 - e) Să se demonstreze că $a_0 + a_4 + a_8 + \dots + a_{20} = \frac{1}{4}[f(1) + f(-1) + f(i) + f(-i)]$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 1)e^x$.
 - a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .
 - c) Să se arate că $f(x) \geq -1$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - d) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
 - e) Să se determine intervalele de convexitate și de concavitate ale funcției f .

SUBIECTUL II

Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție "o" definită prin $x \circ y = x + y + \sqrt{2}$.

- a) Să se verifice că $x \circ y = y \circ x$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$.
- b) Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R}$.
- c) Să se determine numărul real e pentru care $x \circ e = e \circ x = x$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
- d) Se consideră numărul $a = 1 \circ 2 \circ 3 \circ \dots \circ 2001 - 2000\sqrt{2}$. Să se arate că a este număr întreg, dar nu este pătratul unui număr natural.
- e) Să se stabilească dacă mulțimea $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ este parte stabilă în raport cu legea "o". Justificați răspunsul.

SUBIECTUL III

Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x + 1}{x^2(x + 1)^2}$.

- a) Să se verifice că $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x + 1)^2}$, $(\forall) x > 0$.
- b) Să se calculeze $f'(x)$, $x > 0$.
- c) Să se arate că $x = 0$ este asimptotă verticală la graficul funcției f .
- d) Să se calculeze $\int_1^2 f(x) dx$.
- e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x)} \int_x^{x+1} f(t) dt$.
- f) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(1) + f(2) + \dots + f(n)]$.

SUBIECTUL IV

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Să se arate că $AB = BA$.
- b) Să se arate că $A^2 = 4A$.
- c) Să se arate că $B^2 = 2B$.
- d) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $(A + B)^n = A^n + B^n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
- e) Să se arate că $(A + B)^n = 4^{n-1}A + 2^{n-1}B$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

Varianta 5

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul $f = X^2 + X + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$.
 - a) Să se arate că polinomul f divide polinomul $X^3 - 1$.
 - b) Să se arate că $x_1^3 = x_2^3 = 1$.
 - c) Să se calculeze $x_1^{2001} + x_2^{2001}$.
 - d) Dacă z este o rădăcină a polinomului f , atunci să se calculeze $z^{20} + z^{19} + \dots + z + 1$.
 - e) Să se găsească o valoare $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, pentru care $f(a) \in \mathbb{N}$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.
 - a) Să se verifice că $f(-x) = f(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - b) Să se determine asimptota spre $-\infty$ la graficul funcției f .
 - c) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{f'(x)}$.
 - e) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinsă între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = -1$ și $x = 1$.
 - f) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-x}^x f(t) dt$.

SUBIECTUL II

Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție "o" definită prin $x \circ y = x + y + 1$.

- a) Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R}$.
- b) Să se determine numărul real e pentru care $x \circ e = e \circ x = x$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
- c) Să se stabilească dacă mulțimea $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ este parte stabilă în raport cu legea "o". Justificați răspunsul.
- d) Să se arate că numărul $a = 1 \circ 3 \circ 5 \circ \dots \circ 2001 - 1000$ este pătratul unui număr natural.
- e) Să se rezolve ecuația $2^x \circ 4^x = 7$, $x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$.

- a) Să se verifice identitatea $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$, $(\forall) x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.
- b) Să se arate că $x = 0$ este asimptotă verticală la graficul funcției f .
- c) Să se determine asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- d) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.
- e) Să se calculeze $\int_1^2 f(x) dx$.
- f) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(1) + f(2) + \dots + f(n)]$.

SUBIECTUL IV

Se consideră șirul cu termenul general $a_n = 2n + 3$, $n \in \mathbb{N}$.

- a) Să se arate că șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ formează o progresie aritmetică și să se determine rația progresiei.
- b) Să se verifice identitatea $\frac{1}{a_k a_{k+1} a_{k+2}} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a_k a_{k+1}} - \frac{1}{a_{k+1} a_{k+2}} \right)$, $(\forall) k \in \mathbb{N}$.
- c) Să se arate că $\frac{1}{a_1 a_2 a_3} + \frac{1}{a_2 a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2}} \right)$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
- d) Să se arate că pentru orice număr natural nenul n avem $a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 2001$.
- e) Să se arate că șirul cu termenul general $b_n = 2^{a_n}$, $n \in \mathbb{N}$, formează o progresie geometrică și să se determine rația sa.
- f) Să se calculeze $b_1 + b_2 + \dots + b_n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

SESIUNEA AUGUST

Varianta 1

Profilurile matematică-fizică, informatică și metrologie

SUBIECTUL I

- Se consideră polinoamele cu coeficienți reali $f = X^3 + aX + b$ și $g = X^3 - 3X + 2$.
 - Să se determine parametri reali a și b , știind că polinomul f se divide cu $X - 1$ și că $f(-1) = 4$.
 - Să se rezolve în \mathbb{C} ecuația $g(x) = 0$.
 - Să se rezolve în \mathbb{R} inecuația $g(x) < 0$.
 - Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $g(2^x) = 0$.
- Se consideră funcția $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^\pi$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \geq 0$.
 - Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow e} \frac{x^\pi - e^\pi}{x - e}$.
 - Să se arate că funcția f este convexă pe $[0, \infty)$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(3, 4)$, $B(-5, 0)$, $C(4, -3)$ și $O(0, 0)$.
 - Să se calculeze aria triunghiului ABC .
 - Să se verifice că $OA = OB = OC$.
 - Să se scrie ecuația cercului care trece prin punctele A , B , C .

SUBIECTUL II

- În mulțimea permutărilor cu cinci elemente S_5 se consideră permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ și $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.
 - Să se determine numărul de inversiuni ale permutării σ .
 - Să se calculeze $\sigma \cdot \tau$ și $\tau \cdot \sigma$.
 - Să se rezolve în S_5 ecuația $x \cdot \sigma = \tau$.
- Se consideră funcțiile $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, unde $f_0(x) = x + 1$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$ și $f_{n+1}(x) = \int_{-1}^x f_n(t) dt$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$ și $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se verifice că $f_1(x) = \frac{(x+1)^2}{2!}$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $f_n(x) = \frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)!}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$ și $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1)$.

SUBIECTUL III

În mulțimea matricelor $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră submulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in (0, \infty), b \in \mathbb{R} \right\}$.

- Să se verifice că matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.
- Să se arate că, dacă $A, B \in G$, atunci $A \cdot B \in G$.

- c) Să se arate că, dacă $A \in G$, atunci există $B \in G$, astfel încât $A \cdot B = B \cdot A = I_2$.
- d) Să se găsească două matrice $A, B \in G$ pentru care $A \cdot B \neq B \cdot A$.
- e) Să se demonstreze că, pentru orice matrice $A \in G$ și $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$, există o matrice $X \in G$, astfel încât $X^n = A$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

- a) Să se determine asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- c) Să se arate că funcția f' este strict crescătoare.
- d) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right]$.
- e) Utilizând teorema lui Lagrange, să se arate că pentru $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$ și $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, avem inegalitățile

$$\left(x - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) \leq f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \left(x - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k-1}{n}\right), (\forall) x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right].$$

Varianta 2

SUBIECTUL I

- Se consideră polinoamele cu coeficienți reali $f = X^3 + aX + b$ și $g = X^3 - 3X - 2$.
 - Să se determine parametri reali a și b , știind că polinomul f are rădăcina dublă $x = -1$.
 - Să se rezolve în \mathbb{C} ecuația $g(x) = 0$.
 - Să se rezolve în \mathbb{R} inecuația $g(x) > 0$.
 - Să se rezolve în $(0, \infty)$ ecuația $g(\log_2 x) = 0$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \pi^x$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\pi^x - \pi^e}{x - e}$.
 - Să se arate că funcția f este convexă pe \mathbb{R} .
 - Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră cercul \mathcal{C} de ecuație $x^2 + y^2 = 25$.
 - Să se verifice că punctul $A(3, 4)$ se află pe cercul \mathcal{C} .
 - Să se scrie ecuația tangentei la cercul \mathcal{C} care trece prin punctul $A(3, 4)$.
 - Să se calculeze aria triunghiului format de axele de coordonate și tangenta la cerc care trece prin punctul $A(3, 4)$.

SUBIECTUL II

- Să se arate că pentru orice numere reale a, b, c, d este adevărată identitatea $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - d)^2 + (d - a)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - bc - cd - da)$.
 - Să se arate că dacă $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ și $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = ab + bc + cd + da$, atunci $a = b = c = d$.
 - Să se rezolve ecuația $4^x + 9^x + 25^x + 49^x = 6^x + 15^x + 35^x + 14^x$, $x \in \mathbb{R}$.
- Se consideră funcțiile $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$, $g(x) = 2x^{n+1} - (n+1)x^2 + n - 1$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
 - Să se verifice că $f'(x) = nx^{n-2}g(x)$, $x \geq 0$.
 - Să se calculeze $g'(x)$, $x \geq 0$.
 - Să se arate că $g(x) \geq 0$, $(\forall) x \geq 0$.
 - Să se arate că $x^n - \frac{1}{x^n} \geq n \left(x - \frac{1}{x}\right)$, $(\forall) x \geq 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.

SUBIECTUL III

În mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_2)$ se consideră submulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{c} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \mid \hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ și matricea $I_3 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$.

- Să se verifice că $I_3 \in G$.
- Să se arate că, dacă $A, B \in G$, atunci $A \cdot B \in G$.
- Să se demonstreze că dacă $A \in G$, atunci există $B \in G$, astfel încât $A \cdot B = I_3$.
- Să se calculeze numărul de elemente ale mulțimii G .
- Să se găsească două matrice $A, B \in G$ pentru care $A \cdot B \neq B \cdot A$.

f) Să se arate că, oricare ar fi matricea $A \in G$, avem $A^4 = I_3$.

SUBIECTUL IV

Se consideră șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit prin $I_n = \int_0^1 (x - x^2)^n dx$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze I_1 .

b) Să se arate că $0 \leq x - x^2 \leq \frac{1}{4}$, $(\forall) x \in [0, 1]$.

c) Să se deducă inegalitățile $0 \leq I_n \leq \frac{1}{4^n}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

d) Utilizând metoda integrării prin părți, să se arate că $I_n = \frac{1}{4} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot I_{n-1}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

e) Să se arate că $0 < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n+1} < \sqrt{\frac{3}{2n+3}}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

f) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n I_n = 0$.

Varianta 3

SUBIECTUL I

- Se consideră polinomul $f = X^3 - X^2 + X - 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.
 - Să se determine x_1, x_2, x_3 .
 - Să se arate că $x_1^{2001} + x_2^{2001} + x_3^{2001}$ este un număr întreg.
 - Să se rezolve ecuația $f(2^x) = 0, x \in \mathbb{R}$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(x^2 + 1)$.
 - Să se calculeze $f'(x), x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln(x^2 + 1) - \ln(\pi^2 + 1)}{x - \pi}$.
 - Să se determine intervalele de concavitate și de convexitate ale funcției f .
 - Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x) dx, x \in \mathbb{R}$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră cercul \mathcal{C} de ecuație $x^2 + y^2 = 100$.
 - Să se verifice că punctul $A(6, 8)$ se află pe cercul \mathcal{C} .
 - Să se scrie ecuația tangentei la cercul \mathcal{C} care trece prin punctul $A(6, 8)$.
 - Să se calculeze aria triunghiului format de axele de coordonate și tangenta la cerc care trece prin punctul $A(6, 8)$.

SUBIECTUL II

- În mulțimea numerelor complexe se consideră submulțimea $G = \{z = a + ib \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 = 1\}$.
 - Să se verifice că $1 \in G$.
 - Să se arate că, dacă $z, w \in G$, atunci $z \cdot w \in G$.
 - Să se arate că, dacă $z \in G$, atunci $\frac{1}{z} \in G$.
 - Să se găsească un element $z \in G, z = a + ib$, astfel încât $a \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2^{x+1} + 3^{x+1}}{2^x + 3^x}$.
 - Să se calculeze $f'(x), x \in \mathbb{R}$.
 - Să se determine asimptotele la graficul funcției f .
 - Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe \mathbb{R} .
 - Să se arate că $2 < f(x) < 3, (\forall) x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III

Se consideră sistemul
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \\ 3x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$$
. Notăm cu A matricea sistemului, cu $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și cu $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Să se calculeze determinantul și rangul matricei A .
- Să se rezolve sistemul.
- Să se arate că $A^n \neq I_3, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

- d)** Să se găsească o matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $B \neq O_3$, pentru care $A \cdot B = O_3$.
- e)** Să se arate că pentru orice $r \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ avem $\det(A + rI_3) \neq 0$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{2001}$ și $g(x) = 2001x^{2002} - 2002x^{2001} + 1$.

- a)** Să se verifice că $f(x) = \frac{x^{2002} - 1}{x - 1}$, $(\forall) x \in \mathbb{R}, x \neq 1$.
- b)** Să se arate că $f'(x) = \frac{g(x)}{(x - 1)^2}$, $(\forall) x \in \mathbb{R}, x \neq 1$.
- c)** Să se calculeze $g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- d)** Să se arate că $g(x) > 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}, x \neq 1$.
- e)** Să se demonstreze că funcția f este bijectivă.
- f)** Notăm cu $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ inversa funcției f . Să se calculeze $\int_1^{2002} h(x) dx$.

SESIUNEA AUGUST

Varianta 1

Profilurile economic, fizică-chimie, chimie-biologie și militar real

SUBIECTUL I

- Se consideră polinomul $f = X^3 + 2X^2 - 5X - 6$.
 - Să se calculeze $f(-1)$.
 - Să se rezolve în \mathbb{C} ecuația $f(x) = 0$.
 - Să se rezolve în \mathbb{R} inecuația $f(x) \geq 0$.
 - Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $f(2^x) = 0$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2^x - 2^\pi}{x - \pi}$.
 - Să se arate că funcția f este convexă pe \mathbb{R} .
 - Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(-1, -1)$ și $C(1, -1)$.
 - Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC .
 - Să se scrie ecuația dreptei AB .
 - Să se calculeze panta dreptei BC .

SUBIECTUL II

- Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție "o" definită prin $x \circ y = 2xy - 6x - 6y + 21$.
 - Să se verifice că $x \circ y = 2(x - 3)(y - 3) + 3$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R}$.
 - Să se găsească două elemente $x, y \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ pentru care $x \circ y \in \mathbb{Z}$.
 - Să se rezolve ecuația $x \circ x \circ x \circ x \circ x = 3$, $x \in \mathbb{R}$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$.
 - Să se verifice că $f(x) = x + 2 + \frac{4}{x - 1}$, $(\forall) x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
 - Să se determine asimptotele la graficul funcției f .
 - Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \int_2^x f(t) dt$.

SUBIECTUL III

Se consideră matricele $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $Y = (1 \ 1 \ -1)$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pentru $a \in \mathbb{R}$ definim matricea $B = aA + I_3$.

- Să se calculeze $A - XY$.
- Să se calculeze A^2 .

- c) Să se arate că $2B - B^2 = I_3$.
- d) Să se arate că matricea B este inversabilă și să se calculeze inversa sa.
- e) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $B^n = I_3 + anA$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcțiile $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x+1) - \ln x$ și $g(x) = f(x) + \frac{x^2}{2}$.

- a) Să se calculeze $f'(x)$ și $g'(x)$, $x \in [0, \infty)$.
- b) Să se calculeze $f(0)$, $g(0)$, $f'(0)$ și $g'(0)$.
- c) Să se arate că $f'(x) < 0$ și $g'(x) >$, $(\forall) x > 0$.
- d) Să se deducă inegalitatea $f(x) < 0$ și $g(x) > 0$, $(\forall) x > 0$.
- e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$.

Varianta 2

SUBIECTUL I

- Se consideră polinomul $f = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.
 - Să se verifice că $f = (X^2 + 1)(X^2 + X + 1)$.
 - Să se arate că polinomul f nu are rădăcini reale.
 - Să se arate că $f(x) \geq \frac{3}{4}$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $S = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.
- Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = x^e$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x > 0$.
 - Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x^e - \pi^e}{x - \pi}$.
 - Să se arate că funcția f este convexă pe $(0, \infty)$.
 - Să se calculeze $\int_1^2 f(x) dx$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(n, -n)$, $n \in \mathbb{N}$.
 - Să se scrie ecuația dreptei A_0A_1 .
 - Să se verifice că punctul A_n se află pe dreapta A_0A_1 , $(\forall) n \in \mathbb{N}$.
 - Să se calculeze lungimea segmentului A_nA_{n+1} .

SUBIECTUL II

- Se consideră sistemul
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \\ 3x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$$
. Notăm cu A matricea sistemului.
 - Să se calculeze determinantul și rangul matricei A .
 - Să se rezolve sistemul.
 - Să se determine acele soluții (x_0, y_0, z_0) ale sistemului pentru care $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 6$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (2^x + 3^x)(2^{-x} + 3^{-x})$.
 - Să se verifice că $f(-x) = f(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că $f(x) \geq f(0)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x)} \int_0^x f(t) dt$.

SUBIECTUL III

Se consideră mulțimea $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{Z})$ și matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Definim funcția $f : \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{Z})$ prin $f(x) = Ax$, unde $x = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{Z})$.

- Să se verifice că $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $(\forall) x, y \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{Z})$.
- Să verifice că $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, $(\forall) x \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{Z})$ și $\lambda \in \mathbb{Z}$.
- Să se arate că, dacă $\det(A) \neq 0$, atunci funcția f este injectivă.
- Să se arate că, dacă $\det(A) \in \{1, -1\}$, atunci funcția f este bijectivă.

- e) Să se arate că, dacă funcția f este bijectivă, atunci $\det(A) \in \{1, -1\}$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-5)$.

- a) Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $f(x) = 0$.
- b) Utilizând teorema lui Rolle, să se arate că f' are patru rădăcini reale, distincte, situate în intervalele $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$ și $(4, 5)$.
- c) Să se verifice identitatea $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \dots + \frac{1}{x-5}$, $(\forall) x \in \mathbb{R} - A$, unde $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- d) Derivând identitatea de la punctul c), să se arate că $\frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} = -\left[\frac{1}{(x-1)^2} + \dots + \frac{1}{(x-5)^2}\right]$,
 $(\forall) x \in \mathbb{R} - A$.
- e) Să se arate că $(f'(x))^2 > f(x)f''(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

Varianta 3

SUBIECTUL I

- Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 + X - 2$.
 - Să se calculeze $f(2)$.
 - Să se rezolve în \mathbb{C} ecuația $f(x) = 0$.
 - Să se rezolve în \mathbb{R} inecuația $f(x) > 0$.
 - Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $f(2^x) = 0$.
- Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x > 0$.
 - Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln x - \ln \pi}{x - \pi}$.
 - Să se arate că funcția f este concavă pe $(0, \infty)$.
 - Să se calculeze $\int_1^e f(x) dx$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(-1, -1)$ și $C(4, 5)$.
 - Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC .
 - Să se scrie ecuația dreptei AB .
 - Să se calculeze panta dreptei AC .

SUBIECTUL II

- Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție "o" definită prin $x \circ y = x + y + 11$.
 - Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R}$.
 - Să se găsească două elemente a , $a \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ pentru care $a \circ b \in \mathbb{Z}$.
 - Să se determine cel mai mic număr natural nenul n , pentru care $1 \circ 2 \circ \dots \circ n > 2001$.
 - Să se determine cel mai mare număr natural n , pentru care $2 \circ 2^2 \circ \dots \circ 2^n < 2001$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$.
 - Să se verifice că $f(x) = \frac{x^5 - 1}{x - 1}$, $(\forall) x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că $f(x) > 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^5} \int_0^x f(t) dt$.

SUBIECTUL III

În mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 2 & 3 & -5 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = I_3 + aA$, unde $a \in \mathbb{R}$.

- Să se calculeze A^2 .
- Să se calculeze determinantul și rangul matricei A .
- Să se verifice că $2B - B^2 = I_3$.
- Să se arate că matricea B este inversabilă și să se determine inversa ei.
- Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $B^n = I_3 + naA$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL IV

Se consideră șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, definit prin $I_n = \int_0^1 (1 - x^2)^n dx$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Să se calculeze I_1 .
- b) Să se arate că $(1 - x^2)^n \geq (1 - x^2)^{n+1}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$, $(\forall) x \in [0, 1]$.
- c) Să se deducă inegalitatea $I_{n+1} \leq I_n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
- d) Să se arate că șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent.
- e) Să se arate că $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
- f) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

SESIUNEA AUGUST

Varianta 1

Profilurile industrial, agricol, silvic și sportiv real

SUBIECTUL I

- Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f = X^2 + aX + b$ și polinomul $g = X^2 + X + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$.
 - Să se determine parametri reali a și b , știind că polinomul f împărțit la $X - 1$ dă restul 3 și $f(-1) = 1$.
 - Să se calculeze $x_1^3 + x_2^3$.
 - Să se rezolve în \mathbb{R} inecuația $g(x) < 3$.
 - Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $g(2^x) = 3$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{-x} + x$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{2^{-x} + x - 2^{-\sqrt{2}} - \sqrt{2}}{x - \sqrt{2}}$.
 - Să se arate că $\int_0^1 f(x) dx$.
 - Să se arate că funcția f este convexă pe \mathbb{R} .
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(2, 2)$ și $C(\pi, \pi)$.
 - Să se scrie ecuația dreptei AB .
 - Să se arate că punctul C se află pe dreapta AB .
 - Să se calculeze lungimea segmentului AB .

SUBIECTUL II

- Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
 - Să se calculeze determinantul și rangul matricei A .
 - Să se arate că $A^2 = 10A$.
 - Să se arate că $A^{2001} \neq I_3$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$.
 - Să se verifice că $f(x) = \frac{x^5 - 1}{x - 1}$, $(\forall) x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că $f(x) > 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^5} \int_0^x f(t) dt$.

SUBIECTUL III

Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție "o" definită prin $x \circ y = x + y - 1$.

- Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R}$.
- Să se determine numărul real e astfel încât $x \circ e = e \circ x = x$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

- c) Să se găsească două elemente $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ pentru care $a \circ b \in \mathbb{Z}$.
- d) Să se determine cel mai mic număr natural nenul n , pentru care $1 \circ 2 \circ \dots \circ n > 2001$.
- e) Să se determine cel mai mare număr natural nenul n , pentru care $2 \circ 2^2 \circ \dots \circ 2^n < 2001$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3}$.

- a) Să se verifice că $f(x) = 3 - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}$, $(\forall) x \geq 0$.
- b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \geq 0$.
- c) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $[0, \infty)$.
- d) Să se determine asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n f(x) dx$.
- f) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\ln n \cdot \int_0^1 x^n f(x) dx \right]$.

Varianta 2

SUBIECTUL I

- Se consideră polinomul $f = X^4 + X + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.
 - Să se verifice că $f(X) = \left(X^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(X + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$.
 - Să se arate că $f(x) > \frac{1}{2}$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ și $T = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.
- Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_3 x$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.
 - Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\log_3 x - \log_3 3}{x - 3}$.
 - Să se calculeze $\int_1^3 f(x) dx$.
 - Să se arate că funcția f este concavă pe \mathbb{R} .
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(3, 4)$, $B(4, 3)$ și $C(-3, -4)$.
 - Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC .
 - Să se scrie ecuația dreptei AC .
 - Să se calculeze panta dreptei AB .

SUBIECTUL II

- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x$.
 - Să se verifice că $f(x) = (x + 1)^2 - 1$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $(f \circ f)(x) = 0$.
 - Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{\text{de } n \text{ ori}}(x) = (x + 1)^{2^n} - 1$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$ și $x \in \mathbb{R}$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + e^{3x} + 2$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că funcția f este strict crescătoare.
 - Să se determine asimptota spre $-\infty$ la graficul funcției f .

SUBIECTUL III

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ se consideră submulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ și matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Să se verifice că $I_2 \in G$.
- Să se arate că, dacă $A, B \in G$, atunci $a \cdot B \in G$.
- Să se arate că, dacă $A, B \in G$, atunci $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.
- Să se arate că, dacă $A \in G$ și $\text{rang}(A) < 2$, atunci $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Să se arate că, dacă $A \in G$ este inversabilă și $A^{-1} \in G$, atunci $\det(A) = 1$.
- Să se arate că, dacă $A \in G$ și $\det(A) = 1$, atunci $A^4 = I_2$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4 - x^2$.

- a) Să se verifice că $f(-x) = f(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
- b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- c) Să se determine $a \in (-2, 2)$ cu proprietatea că dreapta $x = a$ desparte suprafața plană cuprinsă între graficul funcției f și axa Ox în două regiuni de arii egale.
- d) Să se determine $b \in (0, 4)$ cu proprietatea că dreapta $y = b$ desparte suprafața plană cuprinsă între graficul funcției f și axa Ox în două regiuni de arii egale.
- e) Să se arate că dreptele $x = a$ și $y = b$, determinate anterior, despart suprafața plană cuprinsă între graficul funcției f și axa Ox în patru regiuni de arii egale.

Varianta 3

SUBIECTUL I

- Se consideră polinomul $f = X^3 - X^2 - 3X - 1$.
 - Să se determine restul împărțirii polinomului f la $X + 1$.
 - Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $f(x) = 0$.
 - Să se rezolve în \mathbb{R} inecuația $f(x) < 0$.
 - Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $f(2^x) = 0$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2001}$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x^{2001} - \pi^{2001}}{x - \pi}$.
 - Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-x}^x f(t) dt$.
 - Să se determine intervalele de convexitate și de concavitate ale funcției f .
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ și $C(-1, -2)$.
 - Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC .
 - Să se calculeze panta dreptei AB .
 - Să se scrie ecuația dreptei AC .

SUBIECTUL II

- Să se verifice că $\hat{a}^3 = \hat{a}$, $(\forall) \hat{a} \in \mathbb{Z}_6$.
În inelul \mathbb{Z}_6 se consideră $S_k = \hat{1}^k + \hat{2}^k + \hat{3}^k + \hat{4}^k + \hat{5}^k$, $(\forall) k \in \mathbb{N}^*$.
 - Să se calculeze S_1 și S_2 .
 - Să se calculeze S_{2001} .
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (5^x + 3^x)(5^{-x} + 3^{-x})$.
 - Să se verifice că $f(x) = 2 + \left(\frac{5}{3}\right)^x + \left(\frac{5}{3}\right)^{-x}$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că $f(x) \geq 4$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Utilizând metoda inducției matematice, să se demonstreze că $f^{(n)}(x) = \left(\frac{5}{3}\right)^x \left(\ln \frac{5}{3}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x \left(\ln \frac{3}{5}\right)^x$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$ și $x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Să se calculeze determinantul și rangul matricei A .
- Să se verifice că $A^2 = B^2 = I_2$.
- Să se arate că matricea B este inversabilă și să se determine inversa ei.
- Să se arate că $A \cdot B \neq B \cdot A$.
- Să se calculeze A^{2001} .
- Să se arate că $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$, $(B \cdot A)^n \neq I_2$.

SUBIECTUL IV

Se consideră șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, definit prin $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Să se calculeze I_1 .
- b) Utilizând metoda integrării prin părți, să se arate că $I_n = -\frac{1}{e} + nI_{n-1}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
- c) Să se arate că $\frac{x^n}{e} \leq x^n e^{-x} \leq x^n$, $(\forall) x \in [0, 1], (\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
- d) Să se deducă inegalitățile $\frac{1}{(n+1)e} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
- e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{3}{\pi}} \cdot I_n$.

SESIUNEA AUGUST

Varianta 1

Profilul pedagogic

SUBIECTUL I

- Notăm cu A mulțimea numerelor naturale care se termină cu cifra 2.
 - Să se arate că mulțimea A nu conține niciun pătrat perfect.
 - Să se găsească un element din mulțimea A care este cub perfect.
 - Să se găsească o submulțime infinită a mulțimii A care nu conține niciun cub perfect.
- Numărul 1000 se mărește cu 20% din valoarea sa și se obține numărul a . Numărul a se micșorează cu 20% din valoarea sa și se obține numărul b . Numărul 1000 se micșorează cu 20% din valoarea sa și se obține numărul c . Numărul c se mărește cu 20% din valoarea sa și se obține numărul d .
 - Să se calculeze a și b .
 - Să se calculeze c și d .
 - Să se calculeze $b - d$.
- Scrierea zecimală a numărului $\frac{17}{909}$ este $0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$.
 - Să se determine cifrele a_1 și a_2 .
 - Să se determine cifra a_{2001} .
 - Să se calculeze $S = a_1 + a_2 + \dots + a_{2001}$.

SUBIECTUL II

- Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.
 - Să se verifice că $A^2 = 3A$.
 - Să se calculeze determinantul și rangul matricei A .
 - Să se arate că matricea $A - A^2 + A^3 - A^4 + \dots + A^{99} - A^{100}$ are toate elementele strict negative.
- Se consideră polinomul $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.
 - Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $f = (X^2 + aX + 1)(X^2 + bX + 1)$.
 - Să se arate că polinomul f nu are rădăcini reale.
 - Să se calculeze $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ și $T = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.
 - Să se arate că $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 = 4$.

SUBIECTUL III

- Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție "o" definită prin $x \circ y = x + y + 2$.
 - Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R}$.
 - Să se determine numărul real e astfel încât $x \circ e = e \circ x = x$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Să se găsească două elemente $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ pentru care $a \circ b \in \mathbb{Z}$.
 - Să se determine cel mai mic număr natural nenul n , pentru care $1 \circ 2 \circ \dots \circ n < 2001$.
 - Să se determine cel mai mare număr natural nenul n , pentru care $3 \circ 3^2 \circ \dots \circ 3^n > 2001$.
- Să se arate că 5 divide numărul $k^2 - k$, $(\forall) k \in \mathbb{Z}$.

SUBIECTUL IV

Piramida triunghiulară regulată $ABCD$ are cele șase muchii egale cu a .

- a) Să se calculeze aria totală a piramidei.
- b) Să se calculeze volumul piramidei.
- c) Fie un punct M situat pe înălțimea din vârful A a piramidei. Să se determine lungimea segmentului AM , știind că $AM = BM$.
- d) Să se arate că muchia AB este perpendiculară pe muchia CD .
- e) Fie punctul E situat în interiorul triunghiului BCD . Să se arate că $AE < AB$.

Varianta 2

SUBIECTUL I

- Să se calculeze $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$.
 - Să se calculeze $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$.
 - Să se găsească cinci numere naturale nenule și distincte astfel încât suma inverselor lor să dea 1.
- La un turneu de tenis participă 2001 de sportivi. Înaintea fiecărui tur, jucătorii rămași în turneu se împart în grupe de câte doi, care joacă între ei. Dacă numărul de jucători este impar, atunci un jucător trece în turul următor fără să joace. După fiecare meci între doi jucători, cel învins părăsește turneul. Turneul se termină când a rămas un singur jucător.
 - Să se afle câte meciuri au fost în primul tur.
 - Să se afle câți jucători au părăsit turneul după primele trei tururi.
 - Să se afle câte meciuri s-au jucat în tot turneul.
- Se consideră numărul $A = 3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{395}$. Să se arate că:
 - A este un număr natural par.
 - A este divizibil cu 13.
 - A este divizibil cu 40.

SUBIECTUL II

- Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție "o" definită prin $x \circ y = -xy + x + y$.
 - Să se verifice că $x \circ y = -(x-1)(y-1) + 1$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R}$.
 - Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $2^x \circ 3^x \circ 5^x = 1$.
- Să se verifice că $\hat{a}^3 = \hat{3}$, $(\forall) \hat{a} \in \mathbb{Z}_6$.
 - Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că $\hat{a}^{2n+1} = \hat{a}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$, $(\forall) \hat{a} \in \mathbb{Z}_6$.
 - Să se calculeze $\hat{1}^{2001} + \hat{2}^{2001} + \hat{3}^{2001} + \hat{4}^{2001} + \hat{5}^{2001}$, în inelul \mathbb{Z}_6 .

SUBIECTUL III

- Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
 - Să se verifice că $A^2 = B^2 = I_2$.
 - Să se arate că matricea A este inversabilă și să se calculeze inversa ei.
 - Să se arate că $A \cdot B \neq B \cdot A$.
 - Să se calculeze A^{2001} .
 - Să se arate că $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$, $(A \cdot B)^n \neq I_2$.
- Să se verifice identitatea $(1-x)(1+x^2)(1+x^2^1)(1+x^2^2) \dots (1+x^{2^{n-1}}) = 1-x^{2^n}$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.
 - Să se arate că numerele $2^{2^n} + 1$ și $2^{2^p} + 1$ sunt prime între ele, unde $n, p \in \mathbb{N}^*$, $n \neq p$.

SUBIECTUL IV

Cubul $ABCD A' B' C' D'$ are muchia de lungime a .

- Să se calculeze aria totală a cubului.

- b) Să se calculeze volumul cubului.
- c) Să se calculeze lungimea segmentului AC' .
- d) Să se calculeze măsura unghiului dintre dreptele AC și AD' .
- e) Se consideră un punct M pe fața $A'B'C'D'$ a cubului. Să se calculeze lungimea minimă și lungimea maximă a segmentului AM .

Varianta 3

SUBIECTUL I

- Un elev are de rezolvat o temă de vacanță care conține 400 de probleme. În prima zi elevul rezolvă o problemă, în a doua zi elevul rezolvă trei probleme, ... , în a n -a zi elevul rezolvă $2n - 1$ probleme.
 - Să se afle câte probleme a rezolvat elevul după primele trei zile de lucru.
 - Să se afle câte probleme a rezolvat elevul în a patra zi și în ziua a 5-a, în total.
 - Să se afle după câte zile termină elevul tema de vacanță.
- Notăm cu A mulțimea numerelor de 4 cifre care se pot forma utilizând numai cifrele 5 și 6.
 - Câte elemente are mulțimea A ?
 - Să se afle suma elementelor mulțimii A .
 - Câte elemente din mulțimea A sunt numere pare?
- Se consideră numerele $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 20$, $b = 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot \dots \cdot 40$ și $c = 41 \cdot 42 \cdot 43 \cdot \dots \cdot 60$.
 - Să se demonstreze că numărul a nu este pătrat perfect.
 - Să se arate că numărul a divide numărul b .
 - Să se arate că numărul b nu divide numărul c .

SUBIECTUL II

- Se consideră polinomul $f = X^5 X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{C}$.
 - Să se verifice că $f = (X^3 + 1)(X^2 + X + 1)$.
 - Să se calculeze $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ și $T = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2$.
 - Să se arate că $x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 + x_4^6 + x_5^6 = 5$.
- Se consideră mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ și } abcd = 1 \right\}$.
 - Să se arate că dacă $A \in M$, atunci $\det(A) = 0$.
 - Să se verifice că dacă $A \in M$, atunci $-A \in M$.
 - Să se determine numărul de elemente al mulțimii M .

SUBIECTUL III

- În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ se consideră submulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ și matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
 - Să se verifice că $I_2 \in G$.
 - Să se arate că dacă $A, B \in G$, atunci $A \cdot B \in G$.
 - Să se arate că dacă $A \in G$ și $\text{rang}(A) < 2$, atunci $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
 - Să se găsească o matrice $A \in G$, $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ cu $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ și $\det(A) = 1$.
- Să se arate că există $a, b \in \mathbb{Z}$, astfel încât $a^2 + b^2 = 29$.
 - Să se arate că nu există $a, b \in \mathbb{Z}$, astfel încât $a^2 + b^2 = 2003$.

SUBIECTUL IV

Piramida patrulateră regulată cu vârful V și baza $ABCD$ are $VA = AB = a$.

- a) Să se calculeze aria laterală a piramidei.
- b) Să se calculeze înălțimea piramidei.
- c) Să se calculeze volumul piramidei.
- d) Să se arate că muchiile VA și VC sunt perpendiculare.
- e) Fie punctul P situat în interiorul pătratului $ABCD$. Să se arate că segmentul VP are lungimea mai mică decât lungimea segmentului VC .

SESIUNEA AUGUST

Varianta 1

Profilul uman

SUBIECTUL I

1. Se consideră determinantul $d = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.
- a) Dezvoltând determinantul d , să se arate că $d = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.
 - b) Utilizând proprietățile determinantilor, să se arate că $d = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$.
 - c) Să se demonstreze identitatea $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2)$.
 - d) Să se rezolve ecuația $8^x + 27^x + 125^x = 3 \cdot 30^x$, $x \in \mathbb{R}$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.
- a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{x - \pi} \left(\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{\pi^2 + 1} \right)$.
 - c) Să se calculeze $f''(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - d) Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției f .
 - e) Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

SUBIECTUL II

Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție "o" definită prin $x \circ y = x + y + 5$.

- a) Să se arate că Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R}$.
- b) Să se determine numărul real e pentru care $x \circ e = e \circ x = x$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
- c) Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $(x + 1) \circ (x^2 + 2) = 14$.
- d) Să se găsească două elemente $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ astfel încât $a \circ b \in \mathbb{Z}$.
- e) Să se determine cel mai mic număr natural nenul n pentru care $1 \circ 2 \circ 2 \circ \dots \circ n > 2001$.

SUBIECTUL III

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x+2}$.

- a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$.
- b) Să se verifice că $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$, $(\forall) x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$.
- c) Să se determine asimptotele spre la graficul funcției f .
- d) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $[0, \infty)$.
- e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x f(t) dt$.
- f) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(1) + f(2) + \dots + f(n)]$.

SUBIECTUL IV

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Să se verifice că $A^2 = B^2 = I_2$.
- b) Să se calculeze A^{2001} .
- c) Să se arate că $A \cdot B \neq B \cdot A$.
- d) Să se arate că $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$, $(A \cdot B)^n \neq I_2$.
- e) Să se calculeze $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2001}$.

Varianta 2

SUBIECTUL I

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Să se verifice că $A^2 = B^2 = I_2$.
 - Să se calculeze A^{2001} .
 - Să se arate că $A \cdot B \neq B \cdot A$.
 - Să se arate că $(A \cdot B)^{2001} \neq I_2$.
 - Să se calculeze $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2001}$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$.
- Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^3 - 3x + \sqrt{2}}{x - \sqrt{2}}$.
 - Să se arate că funcția f are un punct de maxim local și un punct de minim local.
 - Să se determine punctul de inflexiune al graficului funcției f .
 - Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

SUBIECTUL II

Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție "o" definită prin $x \circ y = x + y + 5$.

- Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R}$.
- Să se determine numărul real e astfel încât $x \circ e = e \circ x = x$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
- Să se găsească două elemente $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ pentru care $a \circ b \in \mathbb{Z}$.
- Să se determine cel mai mic număr natural nenul n , pentru care $1 \circ 2 \circ \dots \circ n > 2001$.
- Să se determine cel mai mare număr natural nenul n , pentru care $2 \circ 2^2 \circ \dots \circ 2^n < 2001$.

SUBIECTUL III

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x^2$.

- Să se verifice că $f(-x) = f(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
- Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f și axa Ox .
- Să se determine $a \in (-1, 1)$ cu proprietatea că dreapta $x = a$ desparte suprafața plană cuprinsă între graficul funcției f și axa Ox în două regiuni de arii egale.
- Să se determine $b \in (0, 1)$ cu proprietatea că dreapta $y = b$ desparte suprafața plană cuprinsă între graficul funcției f și axa Ox în două regiuni de arii egale.

SUBIECTUL IV

Se consideră polinomul $f = (X + 1)^{20} + (X - 1)^{20}$ având forma algebrică $f = a_{20}X^{20} + a_{19}X^{19} + \dots + a_1X + a_0$.

- Să se calculeze $f(0)$.
- Să se determine a_{20} , a_{19} și a_{18} .

- c) Să se calculeze suma coeficienților polinomului f .
- d) Să se arate că $a_{11} = 0$.
- e) Considerăm $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, o rădăcină a polinomului f . Să se arate că $|z + 1| = |z - 1|$.
- f) Să se arate că dacă $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ este o rădăcină a polinomului f , atunci $a = 0$.

Varianta 3

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.
 - a) Să se arate că polinomul f divide polinomul $X^5 - 1$.
 - b) Să se verifice că $f = \left(X^2 + \frac{1}{2}X\right)^2 + \left(\frac{1}{2}X + 1\right)^2 + \frac{1}{2}X^2$.
 - c) Să se arate că $f(x) \geq 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - d) Să se arate că polinomul f nu are rădăcini reale.
2. Se consideră funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2}$.
 - a) Să se verifice că $f(x) = 2 - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$, $(\forall) x \in [0, \infty)$.
 - b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - c) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $[0, \infty)$.
 - d) Să se arate că funcția f este concavă pe $[0, \infty)$.
 - e) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

SUBIECTUL II

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$.

- a) Să se calculeze determinantul matricei A .
- b) Să se calculeze A^2 .
- c) Să se determine cel mai mic număr natural nenul n pentru care $A^n = I_2$.
- d) Să se calculeze A^{2001} .
- e) Să se calculeze $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2001}$.

SUBIECTUL III

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)}$.

- a) Să se verifice că $f(-x) = f(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
- b) Să se arate că $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 2}$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
- c) Să se determine asimptotele la graficul funcției f .
- d) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(\sqrt{1}) + f(\sqrt{2}) + \dots + f(\sqrt{n})]$.

SUBIECTUL IV

Fie mulțimea de numere reale $M = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 2b^2 = 1\}$.

- a) Să se arate că, dacă $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$, cu a, b, c, d numere întregi, atunci $a = c$ și $b = d$.

- b) Să se arate că $1 \in M$.
- c) Să se arate că, dacă $z, w \in M$, atunci $z \cdot w \in M$.
- d) Să se arate că, dacă $z \in M$, atunci $\frac{1}{z} \in M$.
- e) Să se găsească un element $a + b\sqrt{2} \in M$ cu $b \neq 0$.