

**BACALAUREAT 2002
SESIUNEA SPECIALĂ**

Proba D

Profilurile matematică-fizică, informatică și metrologie

SUBIECTUL I

1. a) Să se verifice că

$$(ax + by + cz)^2 + (ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2), (\forall) x, y, z, a, b, c, \in \mathbb{C}.$$

- b) Să se deducă inegalitatea $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$, $(\forall) a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$.

- c) Să se arate că, dacă $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2$, unde $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}^*$, atunci $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2002^x + 2002^{-x}$.

- a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

- b) Să se arate că funcția f este convexă pe \mathbb{R} .

- c) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1, 1)$ și $B(2, 2)$, precum și dreapta $d : y = 3$.

- a) Să se calculeze lungimea segmentului AB .

- b) Să se scrie ecuația dreptei AB .

- c) Să se găsească un punct C pe dreapta d , cu proprietatea că aria triunghiului ABC este egală cu 1.

SUBIECTUL II

1. În mulțimea permutărilor cu trei elemente S_3 , se consideră permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

- a) Să se calculeze $\sigma\tau$ și $\tau\sigma$.

- b) Să se determine numărul de inversiuni al permutării σ .

- c) Să se rezolve ecuația $\sigma x = \tau$.

- d) Să se arate că în orice submulțime H a lui S_3 care are 5 permutări, găsim două permutări x și y cu proprietatea că $xy \neq yx$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$ și mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

- a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

- b) Utilizând teorema lui Rolle pentru funcția f , să se arate că funcția f' are câte o rădăcină în intervalele $(1, 2)$, $(2, 3)$ și $(3, 4)$.

- c) Să se arate că $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-4}$, $(\forall) x \in \mathbb{R} \setminus A$.

- d) Derivând egalitatea de la punctul c), să se arate că $(f'(x))^2 > f(x)f''(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R} \setminus A$.

SUBIECTUL III

Se consideră un număr prim $p \geq 3$, iar în corpul \mathbb{Z}_p se consideră submulțimea $G = \mathbb{Z}_p - \{\hat{0}\}$. Pentru un element $\hat{a} \in G$, definim funcția $f : G \rightarrow G$, $f(\hat{x}) = \hat{a} \cdot \hat{x}$.

- a) Să se arate că, dacă $\hat{x}, \hat{y} \in G$, atunci $\hat{x} \cdot \hat{y} \in G$.

- b) Să se arate că funcția f este injectivă.

- c) Să se arate că funcția f este bijectivă.

- d) Din egalitatea $\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \dots \cdot (\widehat{p-1}) = f(\hat{1}) \cdot f(\hat{2}) \cdot \dots \cdot f(\widehat{p-1})$, să se deducă relația $\hat{a}^{p-1} = \hat{1}$, $(\forall) \hat{a} \in G$.
- e) Considerăm polinoamele $g, h \in \mathbb{Z}_p[X]$, definite prin $g = X^{p-1} - \hat{1}$, $h = (X - \hat{1})(X - \hat{2}) \dots (X - (\widehat{p-1}))$. Să se arate că $g(\hat{x}) = h(\hat{x}) = \hat{0}$, $(\forall) \hat{x} \in G$.
- f) Să se arate că $\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \dots \cdot (\widehat{p-1}) + \hat{1} = \hat{0}$.

SUBIECTUL IV

Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 1}$, definit prin $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, $n \geq 1$.

- a) Să se calculeze I_0 și I_1 .
- b) Utilizând metoda integrării prin părți, să se arate că $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
- c) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $I_{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{\pi}{2}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

Se consideră cunoscut că $I_{2n+1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{1}{2n+1}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

- d) Să se arate că $1 \leq \frac{I_n}{I_{n+1}} \leq \frac{n+1}{n}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

Se consideră șirul $(w_n)_{n \geq 1}$, definit prin $w_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \sqrt{2n+1}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

- e) Să se verifice că $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = (w_n)^2 \cdot \frac{\pi}{2}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

- f) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

SESIUNEA SPECIALĂ

Proba D

Profilurile economic, fizică-chimie, chimie-biologie, militar real, industrial, agricol, silvic, sportiv real

SUBIECTUL I

- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 6$.
 - Să se verifice că $f(2 - x) = f(2 + x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $f(2^x) = 2$.
 - Să se rezolve în \mathbb{R} inecuația $f(x) \leq 3$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x) dx$.
 - Să se arate că funcția f este convexă pe \mathbb{R} .
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(5, 0)$, $O(0, 0)$ și $B(3, -4)$.
 - Să se verifice că $OA = OB$.
 - Să se scrie ecuația dreptei AB .
 - Să se găsească un punct $C(a, b)$ cu $a, b \in \mathbb{Z}^*$, $C \neq B$ și $C \neq A$, cu proprietatea că $OC = OB$.

SUBIECTUL II

- În $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$.
 - Să se calculeze A^2 și A^3 .
 - Să se calculeze A^{2002} și A^{2003} .
 - Să se arate că $A^n \neq I_2$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x^2 + x^4$.
 - Să se verifice că $f(x) = \frac{x^6 + 1}{x^2 + 1}$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că $f(x) \geq \frac{1}{1 + x^2}$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Integrând inegalitatea de la punctul b), să se arate că $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \geq \arctg x$, $(\forall) x \geq 0$.
 - Notăm cu $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a funcției f . Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf(x)}{F(x)}$.

SUBIECTUL III

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pentru orice $x \in \mathbb{C}$, definim matricea $B(x) = A + xI_3$ și funcția polinomială $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x) = \det B(x)$.

- Să se determine determinantul și rangul matricei A .
- Să se arate că $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x$, $(\forall) x \in \mathbb{C}$.
- Să se rezolve în \mathbb{C} ecuația $f(x) = 0$.
- Să se găsească o matrice nenulă $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ cu proprietatea $AU = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- e) Să se găsească o matrice nenulă $C \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{C})$ cu proprietatea $AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- f) Să se arate că nu există o matrice $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ cu proprietatea $AV = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

SUBIECTUL IV

Pentru oricare $p \in \mathbb{N}$ și $q \in \mathbb{N}$, notăm cu $B(p, q) = \int_0^1 x^q(1-x)^p dx$.

- a) Să se calculeze $B(1, 1)$.
- b) Să se arate că $B(0, n) = \frac{1}{n+1}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$.
- c) Efectuând schimbarea de variabilă $x = 1 - t$, să se arate că $B(p, q) = B(q, p)$.
- d) Utilizând metoda integrării prin părți, să se arate că $B(p, q) = \frac{p}{q+1}B(p-1, q+1)$.
- e) Să se arate că $B(n, q) = \frac{n!q!}{(q+n)!}B(0, n+q)$, $(\forall) n, q \in \mathbb{N}$.
- f) Să se arate că $B(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$, $(\forall) p, q \in \mathbb{N}$.

SESIUNEA IUNIE-IULIE
Varianta 1

Proba D

Profilurile matematică-fizică, informatică și metrologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = 3z - 2\bar{z}$, unde prin \bar{z} notăm conjugatul numărului complex z .
 - a) Să se verifice că $\overline{f(z)} = 3\bar{z} - 2z$, $(\forall) z \in \mathbb{C}$.
 - b) Să se arate că $(f \circ f)(z) = 13z - 12\bar{z}$, $(\forall) z \in \mathbb{C}$.
 - c) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că
$$\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{\text{de } n \text{ ori } f}(z) = \frac{5^n + 1}{2}z - \frac{5^n - 1}{2}\bar{z}, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \text{ și } (\forall) z \in \mathbb{C}.$$
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1)^{2002}$.
 - a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
 - c) Să se arate că funcția f este convexă pe \mathbb{R} .
 - d) Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x) dx$.
3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(2n + 1, 3n - 1)$, $n \in \mathbb{N}$.
 - a) Să se calculeze lungimea segmentului $[A_0A_1]$.
 - b) Să se scrie ecuația dreptei A_0A_1 .
 - c) Să se arate că punctul A_k este situat pe dreapta A_0A_1 , $(\forall) k \in \mathbb{N}$.

SUBIECTUL II

1. Pe \mathbb{R} se definește legea de compoziție "o" prin $x \circ y = x + y - 1$.
 - a) Să se verifice că $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$, $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R}$.
 - b) Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $2^x \circ 4^x = 5$.
 - c) Să se rezolve în \mathbb{N}^* ecuația $C_n^0 \circ C_n^1 \circ C_n^2 = 44 + n$.
 - d) Să se rezolve în \mathbb{R} inecuația $x \circ x^2 \leq 1$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \operatorname{arctg} x$.
 - a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - b) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe \mathbb{R} .
 - c) Să se arate că funcția f este bijectivă.
 - d) Notăm cu $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ inversa funcției f . Să se calculeze $\int_0^{1+\frac{\pi}{4}} g(x) dx$.

SUBIECTUL III

Se consideră polinoamele $f = a + bX + cX^2 + dX^3$ și $g = X^4 + 1$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, iar g are rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

Se mai consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -d & a & b & c \\ -c & -d & a & b \\ -b & -c & -d & a \end{pmatrix}$ și $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{pmatrix}$.

- a) Să se verifice că $g = (X^2 - X\sqrt{2} + 1)(X^2 + X\sqrt{2} + 1)$.
- b) Să se arate că $\det(V) \neq 0$.
- c) Să se arate că $A \cdot V = \begin{pmatrix} f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) & f(x_4) \\ x_1 f(x_1) & x_2 f(x_2) & x_3 f(x_3) & x_4 f(x_4) \\ x_1^2 f(x_1) & x_2^2 f(x_2) & x_3^2 f(x_3) & x_4^2 f(x_4) \\ x_1^3 f(x_1) & x_2^3 f(x_2) & x_3^3 f(x_3) & x_4^3 f(x_4) \end{pmatrix}$.
- d) Utilizând relația de la punctul c), să se arate că $\det(A) = f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)$.
- e) Să se arate că polinomul g este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.
- f) Să se arate că $a = b = c = d = 0$ dacă și numai dacă $\det(A) = 0$.

SUBIECTUL IV

Se consideră șirurile $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$, definite prin $a_n = 1 + \frac{1}{n!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ și $b_n = a_n + \frac{1}{n! \cdot n}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
Admitem cunoscut faptul că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent către e .

- a) Să se verifice că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător.
- b) Să se arate că șirul $(b_n)_{n \geq 1}$ este strict descrescător.
- c) Să se arate că $a_{n+1} < e < b_n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
- d) Utilizând inegalitățile de la punctul c), să se arate că $\frac{1}{(n+1)!} < e - a_n < \frac{1}{n! \cdot n}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
- e) Utilizând inegalitățile de la punctul d), să se arate că numărul e este irațional.
- f) Să se arate că nu există două polinoame nenule $f, g \in \mathbb{R}[X]$, cu proprietatea că $a_n = \frac{f(n)}{g(n)}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

Varianta 2

SUBIECTUL I

- Se consideră polinoamele $f = X^3 + X^2 + 1$ și $g = X^4 + X^3 + X + 1$. Notăm cu $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile polinomului f .
 - Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul g .
 - Să se arate că polinomul f nu are rădăcini raționale.
 - Să se arate că $g(x_1) + g(x_2) + g(x_3) \in \mathbb{Z}$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin(x^2)$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.
 - Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(-n, n^2)$, $n \in \mathbb{N}$.
 - Să se scrie coordonatele punctelor A_0 și A_1 .
 - Să se scrie ecuația dreptei A_0A_1 .
 - Să se arate că aria triunghiului $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ nu depinde de $n \in \mathbb{N}$.

SUBIECTUL II

- Se consideră funcția $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = 8z - \bar{z}$, unde prin \bar{z} notăm conjugatul numărului complex z .
 - Să se verifice că $f(x + iy) = 7x + 9yi$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$.
 - Să se rezolve ecuația $f(z) = 0$.
 - Să se arate că funcția f este injectivă.
 - Să se arate că funcția f este surjectivă.
- Se consideră funcția $f : [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 9 - x^2$. Notăm cu S suprafața plană cuprinsă între graficul funcției f și axa Ox .
 - Să se calculeze aria suprafeței S .
 - Să se arate că dreapta $x = 0$ desparte suprafața S în două regiuni de arii egale.
 - Să se arate că dreapta $y = 9 - \frac{9}{\sqrt[3]{4}}$ desparte suprafața S în două regiuni de arii egale.

SUBIECTUL III

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$ se consideră submulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} \\ \hat{2}\hat{y} & \hat{x} \end{pmatrix} \mid \hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{Z}_5 \right\}$.

- Să se verifice că $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \in G$ și $O_2 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix} \in G$.
- Să se arate că, dacă $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{Z}_5$ și $\hat{x}^2 - \hat{2}\hat{y}^2 = \hat{0}$, atunci $\hat{x} = \hat{y} = \hat{0}$.
- Să se arate că, dacă $A, B \in G$ atunci $A + B \in G$ și $A \cdot B \in G$.
- Să se determine numărul de elemente din mulțimea G .
- Să se arate că, dacă $A \in G$ și $A \neq O_2$, atunci există $B \in G$ astfel încât $A \cdot B = I_2$.
- Să se dea un exemplu de structură de corp cu 25 de elemente.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x^{2002}$.

- a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- b) Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $[0, +\infty)$.
- c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(f' \left(\frac{1}{n} \right) + f' \left(\frac{2}{n} \right) + \dots + f' \left(\frac{n}{n} \right) \right)$.
- d) Utilizând teorema lui Lagrange, să se arate că pentru orice $x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right]$ avem inegalitățile

$$\left(x - \frac{k}{n} \right) \cdot f' \left(\frac{k-1}{n} \right) \leq f(x) - f \left(\frac{k}{n} \right) \leq \left(x - \frac{k}{n} \right) \cdot f' \left(\frac{k}{n} \right), \quad (\forall) n \geq 2$$

și $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

- e) Integrând inegalitățile de la punctul d), să se arate că

$$-\frac{1}{2n^2} \cdot f' \left(\frac{k-1}{n} \right) \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx \leq -\frac{1}{2n^2} \cdot f' \left(\frac{k}{n} \right), \quad (\forall) n \geq 2$$

și $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

- f) Adunând inegalitățile de la punctul e), să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \left(f \left(\frac{1}{n} \right) + f \left(\frac{2}{n} \right) + \dots + f \left(\frac{n}{n} \right) \right) \right).$$

Varianta 3

SUBIECTUL I

- Se consideră polinomul $f = (X^2 - 1)(X^2 - 4) - 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.
 - Să se verifice că $f = X^4 - 5X^2 + 3$.
 - Să se arate că polinomul f are toate rădăcinile reale.
 - Să se arate că $x_1^{2003} + x_2^{2003} + x_3^{2003} + x_4^{2003} \in \mathbb{N}$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1)^5 - (x - 1)^5$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că funcția f este convexă pe \mathbb{R} .
 - Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
 - Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $O(0, 0)$ și $A_n \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}, \frac{2n}{n^2 + 1} \right)$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$.
 - Să se verifice identitatea $(x^2 - 1)^2 + (2x)^2 = (x^2 + 1)^2$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că $OA_n = 1$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$.
 - Să se arate că pe cercul de ecuație $x^2 + y^2 = 1$ avem o infinitate de puncte cu ambele coordonate raționale.

SUBIECTUL II

- Se consideră inelul \mathbb{Z}_6 și funcția $f : \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_6$, $f(\hat{x}) = \hat{x}^n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.
 - Să se verifice că $\hat{a}^3 = \hat{a}$, $(\forall) \hat{a} \in \mathbb{Z}_6$.
 - Să se arate că $(\hat{x} + \hat{y})^3 = \hat{x}^3 + \hat{y}^3$, $(\forall) \hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{Z}_6$.
 - Să se determine cel mai mic număr natural $n \geq 2$ pentru care funcția f este un izomorfism de inele.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 4) - \ln(x^2 + 1)$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
 - Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$ și strict descrescătoare pe intervalul $[0, +\infty)$.
 - Să se arate că $0 < f(x) \leq \ln 4$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III

În mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- Să se calculeze determinantul și rangul matricei A .
- Să se arate că matricea A este inversabilă și să se calculeze inversa ei.
- Să se arate că, dacă $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ și $YA = AY$, atunci există $a, b, c \in \mathbb{C}$ astfel încât $Y = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

d) Se consideră matricea $Z = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, cu $a, b, c \in \mathbb{C}$. Să se arate, folosind metoda inducției matematice, că

$$Z^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*.$$

e) Se consideră polinomul $f = X^n - \alpha$, unde $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Să se arate că polinomul f nu are rădăcini multiple.

f) Să se determine numărul de soluții $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ ale ecuației $X^{2002} = A$.

SUBIECTUL IV

Se consideră $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definit prin $I_0 = \int_0^1 e^{-x} dx$ și $I_n = \int_0^1 e^{-x} x^n dx$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze I_0 .

b) Utilizând metoda integrării prin părți, să se arate că $I_n = -\frac{1}{e} + n \cdot I_{n-1}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se arate că $I_n = \frac{n!}{e} \left(e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \right)$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

d) Să se arate că $\frac{x^n}{e} \leq x^n e^{-x} \leq x^n$, $(\forall) x \in [0, 1]$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

e) Integrând inegalitățile de la punctul **d)**, să se arate că $\frac{1}{(n+1)e} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

f) Utilizând inegalitățile de la punctul **e)**, să se arate că $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Varianta 4

SUBIECTUL I

- Se consideră funcția $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x) = x^2 + 2x$.
 - Să se verifice că $f(x) = (x+1)^2 - 1$, $(\forall) x \in \mathbb{C}$.
 - Să se rezolve în \mathbb{C} ecuația $(f \circ f)(x) = 0$.
 - Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{\text{de } n \text{ ori } f}$, $(\forall) x \in \mathbb{C}$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
 - Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(n, -n)$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$.
 - Să se scrie ecuația dreptei A_0A_1 .
 - Să se arate că lungimea segmentului A_nA_{n+1} nu depinde de n , $(\forall) n \in \mathbb{N}$.
 - Să se arate că punctul A_n se află pe dreapta A_0A_1 , $(\forall) n \in \mathbb{N}$.

SUBIECTUL II

- Se consideră sistemul
$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$$
, unde $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Notăm cu A matricea sistemului.
 - Să se calculeze determinantul și rangul matricei A .
 - Să se rezolve sistemul.
 - Să se găsească o soluție (x_0, y_0, z_0) a sistemului pentru care $x_0 + 2y_0 + 3z_0 = 8$.
- Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, definit prin $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$. Admitem cunoscut faptul că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\pi^2}{6}$ și considerăm șirurile $(b_n)_{n \geq 1}$ și $(c_n)_{n \geq 1}$ definite prin $b_n = a_n + \frac{1}{n}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$ și $c_n = a_n + \frac{1}{n+1}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
 - Să se arate că șirul $(b_n)_{n \geq 1}$ este strict descrescător.
 - Să se arate că șirul $(c_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător.
 - Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{\pi^2}{6}$.
 - Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(a_n - \frac{\pi^2}{6} \right) = -1$.

SUBIECTUL III

Pentru orice număr natural nenul n , se consideră mulțimea de numere raționale $H_n = \left\{ \frac{k}{n!} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

- Să se arate că, dacă $x, y \in H_n$, atunci $x + y \in H_n$.
- Să se arate că, dacă $x, y \in H_n$, atunci $x \cdot y \in H_n$.
- Să se arate că, dacă $n < p \in \mathbb{N}^*$, atunci $H_n \subset H_p$.

- d)** Să se arate că pentru orice număr rațional r , există $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $r \in H_n$.
- e)** Să se arate că dacă $(G, +)$ este un subgrup al grupului $(\mathbb{Q}, +)$ și $\frac{1}{n!} \in G$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $H_n \subset G$.
- f)** Să se demonstreze că, dacă $G_1, G_2, \dots, G_{2002}$ sunt subgrupuri ale grupului $(\mathbb{Q}, +)$ și $\mathbb{Q} = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_{2002}$, atunci există $i \in \{1, 2, \dots, 2002\}$ astfel încât $G_i = \mathbb{Q}$.

SUBIECTUL IV

Se consideră numerele reale a_1, a_2, \dots, a_n și funcțiile $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots + a_n \sin nx$ și $F(x) = -a_1 \cos x - \frac{a_2}{2} \cos 2x - \dots - \frac{a_n}{n} \cos nx$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

- a)** Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f pe \mathbb{R} .
- b)** Să se verifice că $F(x + 2k\pi) = F(x)$, $(\forall) k \in \mathbb{Z}$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
- c)** Utilizând rezultatul: ”Dacă o funcție $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este periodică și monotonă, atunci funcția g este constantă”, să se arate că dacă $f(x) \geq 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$, atunci funcția F este constantă.
- d)** Să se arate că dacă funcția F este constantă, atunci $f(x) = 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
- e)** Notăm cu $S(p, q) = \int_0^{2\pi} \sin px \sin qx \, dx$, $(\forall) p, q \in \mathbb{N}^*$.

Utilizând formula

$$2 \sin a \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b), \quad (\forall) a, b \in \mathbb{R},$$

$$\text{să se arate că } S(p, q) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } p \neq q, p, q \in \mathbb{N}^* \\ \pi, & (\forall) p \in \mathbb{N}^* \end{cases}.$$

- f)** Să se demonstreze că dacă $f(x) \geq 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$, atunci $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

Varianta 5

SUBIECTUL I

- Pe \mathbb{R} se definește legea de compoziție "o" prin $x \circ y = x + y + 2$.
 - Să se verifice că $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$, $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R}$.
 - Să se determine elementul $e \in \mathbb{R}$ pentru care $x \circ e = e \circ x = x$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$, avem

$$x_0 \circ x_1 \circ \dots \circ x_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n + 2n, (\forall) x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

- Să se rezolve în \mathbb{N}^* ecuația $C_n^0 \circ C_n^1 \circ C_n^2 \circ C_n^n = 2n + 64$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2xe^{x^2}$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se determine intervalele de convexitate și de concavitate ale funcției f .
 - Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
 - În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(3n, 2n)$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$.
 - Să se scrie ecuația dreptei A_0A_1 .
 - Să se calculeze lungimea segmentului A_0A_1 .
 - Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, punctul A_n se găsește pe dreapta A_0A_1 .

SUBIECTUL II

- În mulțimea permutărilor cu 4 elemente, S_4 , considerăm permutările $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,
 $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, precum și submulțimea $H = \{x \in S_4 \mid x^2 = e\}$.
 - Să se verifice că $e \in H$.
 - Să se arate că $\sigma \in H$ și $\tau \in H$.
 - Să se arate că $\sigma\tau \in H$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a \cos x + b \cos 2x + c \cos 3x$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$.
 - Să se verifice că $f(x + 2n\pi) = f(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$ și $(\forall) n \in \mathbb{N}$.
 - Utilizând rezultatul: "Dacă o funcție periodică $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are limită la infinit, atunci funcția este constantă", să se arate că dacă $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, atunci $a = b = c = 0$.

SUBIECTUL III

Se consideră polinoamele $f = X^5 - 1$ și $g = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

- Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul g .
- Să se verifice că $g = (X^2 + aX + 1)(X^2 + bX + 1)$, unde $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ și $b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.
- Să se arate că polinomul g este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.
- Se consideră polinomul cu coeficienți raționali $h = X^2 + pX + q$. Să se arate că dacă polinoamele f și h nu sunt prime între ele, atunci ele au polinomul $X - 1$ ca cel mai mare divizor comun în $\mathbb{Q}[X]$.

- e) În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} r & t \\ s & u \end{pmatrix}$. Să se verifice că $A^2 - (r + u)A + (ru - st)I_2 = O_2$.
- f) Să se arate că dacă $A^5 = I_2$, atunci $A = I_2$.

SUBIECTUL IV

Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, definit prin $a_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Să se verifice că $\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + \dots + a^n + \frac{a^{n+1}}{1-a}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$ și $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- b) Să se deducă relația

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2}, (\forall) x \in [0, 1], (\forall) n \in \mathbb{N}^*.$$

- c) Să se arate că $0 \leq \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2} \leq x^{2(n+1)}$, $(\forall) x \in [0, 1], (\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
- d) Integrând inegalitățile de la punctul c), să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2} dx = 0$.
- e) Să se calculeze $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$.
- f) Integrând inegalitățile de la punctul b), să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\pi}{4}$.

SESIUNEA IUNIE-IULIE

Varianta 1

Profilurile economic, fizică-chimie, chimie-biologie, militar real, industrial, agricol, silvic, sportiv real

SUBIECTUL I

- Se consideră polinomul $f = X^3 + X^2 + X + 1$.
 - Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X + 1$.
 - Să se rezolve în \mathbb{C} ecuația $f(x) = 0$.
 - Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $f(2^x) = 0$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin 2x$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi}$.
 - Să se calculeze $\int_0^{2\pi} f(x) dx$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(-1, -1)$ și $C(-1, 1)$.
 - Să se calculeze lungimea segmentului AB .
 - Să se determine panta dreptei AB .
 - Să se scrie ecuația dreptei AC .

SUBIECTUL II

- Se consideră sistemul
$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$$
, unde $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Notăm cu A matricea sistemului.
 - Să se calculeze determinantul și rangul matricei A .
 - Să se rezolve sistemul.
 - Să se găsească o soluție (x_0, y_0, z_0) a sistemului, cu proprietatea ca $x_0 + y_0 + z_0 = 4$.
- Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = \frac{1^2 - 1 + 1}{1^2 + 1 + 1} \cdot \frac{2^2 - 2 + 1}{2^2 + 2 + 1} \cdot \dots \cdot \frac{n^2 - n + 1}{n^2 + n + 1}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$ și funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x + 1$.
 - Să se verifice că $f(x + 1) = x^2 + x + 1$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $a_n = \frac{1}{n^2 + n + 1}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
 - Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
 - Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^n f(x) dx}{n^3}$.

SUBIECTUL III

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, precum și submulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \mid a \in (0, \infty), b \in \mathbb{R} \right\}$.

- a) Să se verifice că matricea $I_2 \in G$.
- b) Să se arate că, dacă $A, B \in G$, atunci $AB \in G$.
- c) Să se arate că, dacă $C \in G$, atunci există $D \in G$, astfel încât $CD = DC = I_2$.
- d) Să se găsească două matrice $S, T \in G$ pentru care $ST \neq TS$.
- e) Să se demonstreze că, pentru orice matrice $A \in G$ și $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$, există o matrice $X \in G$ astfel încât $X^n = A$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x - x^2 - x^3 + \dots + x^8$ și $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^9 + 1$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

- a) Să se calculeze $f(-1)$ și $g(-1)$.
- b) Să se verifice că $(x+1)f(x) = g(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
- c) Să se arate că dacă $x < -1$, atunci $g(x) < 0$ și dacă $x > -1$, atunci $g(x) > 0$.
- d) Să se arate că $f(x) > 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
- e) Să se arate că funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^9}{9}$ este o primitivă a funcției f pe \mathbb{R} .
- f) Să se arate că $F(x) > 0$, $(\forall) x > 0$.

Varianta 2

SUBIECTUL I

1.
 - a) Să se verifice că $\left(a - \frac{1}{a}\right)^3 = a^3 - \frac{1}{a^3} - 3\left(a - \frac{1}{a}\right)$, $(\forall) a \in \mathbb{C}^*$.
 - b) Să se arate că dacă $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 1$, atunci $a \geq \frac{1}{a}$.
 - c) Să se arate că, dacă $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 1$, atunci $x^3 - \frac{1}{x^3} \geq 3\left(x - \frac{1}{x}\right)$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos 4x$.
 - a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
 - c) Să se calculeze $\int_0^\pi f(x) dx$.
3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1, -1)$, $B(2, -2)$ și $C(3, -3)$.
 - a) Să se calculeze lungimea segmentului AB .
 - b) Să se scrie ecuația dreptei AC .
 - c) Să se arate că punctul B se află pe dreapta AC .

SUBIECTUL II

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ se consideră submulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ -\hat{b} & \hat{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_3 \right\}$.
 - a) Să se verifice că $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \in G$ și $T = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ -\hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix} \in G$.
 - b) Să se arate că, dacă $A, B \in G$, atunci $AB \in G$.
 - c) Să se determine numărul de elemente ale mulțimii G .
 - d) Să se determine cel mai mic număr natural nenul n , pentru care $T^n = I_2$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2002x^{2001}}{x^{2002} + 1}$.
 - a) Să se verifice că funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \ln(x^{2002} + 1)$, este o primitivă a funcției f pe \mathbb{R} .
 - b) Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x) dx$.
 - c) Să se determine asimptota către $-\infty$ la graficul funcției f .

SUBIECTUL III

Se consideră polinoamele $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ și $g = X^3 + X^2 + X + 1$ cu rădăcinile $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{C}$.

- a) Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul g .
- b) Să se calculeze $g(-1)$.
- c) Să se determine y_1, y_2 și y_3 .
- d) Să se calculeze $a = y_1^{2002} + y_2^{2002} + y_3^{2002}$.
- e) Să se arate că numărul $b = g(x_1)g(x_2)g(x_3)g(x_4)$ este natural.

- f) Să se arate că $f(y_1) + f(y_2) + f(y_3) = 3$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(ax^2 + bx + c)$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- a) Să se calculeze $f'(x)$ și $f''(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- b) Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ dacă $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ și $f''(0) = 4$.
- c) Considerăm funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^x(x^2 + x)$. Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că

$$g^{(n)}(x) = e^x(x^2 + 2(n+1)x + n^2), (\forall) x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*.$$

(Prin $g^{(n)}$ am notat derivata de ordinul n a funcției g).

- d) Să se arate că $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
- e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g'(0) + g''(0) + \dots + g^{(n)}(0)}{n^3}$.
- f) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

Varianta 3

SUBIECTUL I

- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 1$.
 - Să se verifice că $f(x) \geq \frac{3}{4}$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $f(2^x) = 3$.
 - Să se rezolve în intervalul $(0, \infty)$ ecuația $f(\log_2 x) = 3$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x}$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că funcția f este convexă pe \mathbb{R} .
 - Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(n, 2n)$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$.
 - Să se calculeze coordonatele punctelor A_0 și A_1 .
 - Să se scrie ecuația dreptei A_0A_1 .
 - Să se arate că A_n se află pe dreapta A_0A_1 , $(\forall) n \in \mathbb{N}$.

SUBIECTUL II

- Se consideră polinomul $f = X^4 + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.
 - Să se verifice identitatea $f = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$.
 - Să se arate că polinomul f nu are nicio rădăcină reală.
 - Să se calculeze $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ și $T = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.
 - Să se arate că $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = -4$.
- Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x > 0$.
 - Să se arate că $x = 1$ este punct de minim global.
 - Să se determine asimptotele la graficul funcției f .
 - Să se arate că $2\sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} < 2\sqrt{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

SUBIECTUL III

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ se consideră submulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 - 2b^2 = 1 \right\}$.

- Să se verifice că $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.
- Să se arate că, dacă $A, B \in G$, atunci $AB \in G$.
- Să se arate că, dacă $X \in G$, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$, atunci X este matrice inversabilă și $X^{-1} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -2b & a \end{pmatrix} \in G$.
- Să se găsească o matrice $A \in G$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ cu $b \neq 0$.
- Să se arate că dacă $B \in G$, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ cu $a > 0$, $b > 0$, atunci $B^n \neq I_2$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

f) Să se arate că mulțimea G este infinită.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcțiile $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x+1) - x$ și $g : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2}$.

a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{-x}{x+1}$ și $g'(x) = \frac{x^2}{x+1}$, $(\forall) x > -1$.

b) Să se calculeze $f'(0)$ și $g'(0)$.

c) Să se arate că $f(x) < 0 < g(x)$, $(\forall) x > 0$.

d) Să se arate că $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

e) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*.$$

f) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) + \ln \left(1 + \frac{3}{n^2} \right) + \dots + \ln \left(1 + \frac{2n-1}{n^2} \right) \right)$.

Varianta 4

SUBIECTUL I

- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + 2$.
 - Să se verifice că $f(x) = (x + 2)^2 - 2$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $(f \circ f)(x) = -2$.
 - Să se rezolve în intervalul \mathbb{R} ecuația $f(2^x) = 7$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^3}$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
 - Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe \mathbb{R} .
 - Să se calculeze $\int_0^1 f'(x) dx$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(3, 4)$, $B(4, 3)$, $C(0, 5)$ și $O(0, 0)$.
 - Să se verifice că $OA = OB = OC$.
 - Să se scrie ecuația dreptei OA .
 - Să se calculeze panta dreptei AB .

SUBIECTUL II

- Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție "o" prin $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$.
 - Să se verifice că $x \circ y = (x + 2)(y + 2) - 2$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R}$.
 - Să se găsească două elemente $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ astfel încât $a \circ b \in \mathbb{N}$.
 - Să se rezolve în $(0, \infty)$ ecuația $(\log_2 x) \circ (\log_3 x) = -2$.
- Se consideră funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(x + 1)(x + 2)}$.
 - Să se verifice că $f(x) = \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x + 2}$, $(\forall) x \in [0, \infty)$.
 - Să se arate că $f(1) + f(2) + \dots + f(n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n + 2}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
 - Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
 - Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(1) + f(2) + \dots + f(n))$.

SUBIECTUL III

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$.

- Să se calculeze AB și BA .
- Să se arate că suma elementelor de pe diagonala principală a matricelor AB și BA este aceeași.
- Să se arate că $\det(A + B) + \det(A - B) = 2(\det(A) + \det(B))$.
- Să se arate că $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

e) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că

$$\det(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = \det(A_1) \cdot \det(A_2) \cdot \dots \cdot \det(A_n), (\forall) A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \text{ și } (\forall) n \in \mathbb{N}^*.$$

f) Să se arate că $\det(A^n) = \det^n(A)$, $(\forall) A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^8$ și $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $f(1)$.

b) Să se verifice că $(x - 1)f(x) = x^7 - 1$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

c) Să se arate că $f(x) > 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

d) Să se arate că $F'(x) = f(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

e) Să se rezolve ecuația $F(x) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{7}$.

f) Să se arate că $F(x) < xf(x)$, $(\forall) x > 0$.

Varianta 5

SUBIECTUL I

- Se consideră polinomul $f = X^3 + 5X - 6$.
 - Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X - 1$.
 - Să se rezolve în \mathbb{C} ecuația $f(x) = 0$.
 - Să se rezolve în \mathbb{R} inecuația $f(x) \leq 0$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(\sin x + \cos x)$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
 - Să se verifice că funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = e^x \sin x$ este o primitivă a funcției f pe \mathbb{R} .
 - Să se calculeze $\int_0^{2\pi} f(x) dx$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1, 2)$, $B(2, 1)$ și $C(3, 3)$.
 - Să se calculeze lungimea segmentului AB .
 - Să se determine panta dreptei AC .
 - Să se scrie ecuația dreptei AB .

SUBIECTUL II

- Pe \mathbb{R} definim legea de compoziție "o" prin $x \circ y = x + y + 10$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R}$.
 - Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $2^x \circ 4^x = 16$.
 - Să se găsească două elemente $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ astfel încât $a \circ b \in \mathbb{N}$.
 - Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $x^2 \circ x = 12$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 + 1}$.
 - Să se verifice că $f(x) = 1 + \frac{3}{x^2 + 1}$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
 - Să se determine asimptotele la graficul funcției f .

SUBIECTUL III

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, precum și submulțimea $G = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid AX = XA\}$.

- Să se verifice că $A \in G$ și $I_2 \in G$.
- Să se găsească o matrice $T \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea $T \notin G$.
- Să se verifice că $A^2 = -I_2$.
- Să se arate că $A^2X = XA^2$, $(\forall) X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
- Să se arate că, dacă $a, b \in \mathbb{C}$, atunci matricea $B = aI_2 + bA \in G$.
- Să se arate că, dacă $X \in G$, atunci există $a, b \in \mathbb{C}$ astfel încât $X = aI_2 + bA$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcțiile $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln a - a \ln x$, unde $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

- a) Să se calculeze $f'(x)$, $x > 0$.
- b) Să se calculeze $f(a)$ și $f'(a)$.
- c) Utilizând teorema lui Fermat să se determine $a > 0$ cu proprietatea $f(x) \geq 0$, $(\forall) x \in (0, \infty)$.
- d) Să se arate că $e^x \geq x^e$, $(\forall) x \in (0, \infty)$.
- e) Să se arate că pentru $x > 0$, avem $e^x = x^e$ dacă și numai dacă $x = e$.
- f) Să se determine numerele reale $c, b > 0$ cu proprietatea că $c^x + b^x \geq x^c + x^b$, $(\forall) x \in (0, \infty)$.

SESIUNEA IUNIE-IULIE

Varianta 1

Profilul pedagogic

SUBIECTUL I

- O minge cade de la o înălțime de 8 m. După fiecare cădere, mingea se ridică la jumătate din înălțimea de la care a căzut.
 - Să se afle ce distanță a parcurs mingea de la început și până a atins pământul a doua oară.
 - Să se afle la ce înălțime se ridică mingea după ce a atins pământul a treia oară.
 - Să se demonstreze că, distanța parcursă de minge de la început și până atinge pământul a suta oară, este mai mică decât 24 m.
- Se consideră mulțimea A formată din toate numerele naturale, scrise în baza 10, care se termină cu cifra 7.
 - Să se găsească un cub perfect în mulțimea A .
 - Să se arate că mulțimea A nu conține niciun pătrat perfect.
 - Să se arate că mulțimea A conține o infinitate de cuburi perfecte.
- Un număr a se mărește cu 10% din valoarea sa și se obține numărul b . Numărul b se micșorează cu 10% din valoarea sa și se obține numărul c .
 - Să se arate că $10b = 11a$.
 - Să se arate că $10c = 9b$.
 - Să se determine numerele a , b și c , știind că $a - c = 1$.

SUBIECTUL II

- Se consideră mulțimea $A = \{x^2 - y^2 \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$.
 - Să se verifice că $0 \in A$ și $1 \in A$.
 - Să se arate că $2 \notin A$.
 - Să se verifice identitatea $\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = x$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că mulțimea A conține toate numerele întregi impare.
- În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ se consideră matricele $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, precum și submulțimea $G = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3) \mid X^2 = I_2\}$.
 - Să se verifice că $I_2 \in G$.
 - Să se arate că $A \in G$ și $B \in G$.
 - Să se arate că $AB \notin G$.
 - Să se găsească cel mai mic număr natural n pentru care $(AB)^n = I_2$.

SUBIECTUL III

- Se consideră polinomul $f = X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.
 - Să se calculeze $f(1)$ și $f(-1)$.
 - Să se determine $a \in \mathbb{C}$ astfel încât să avem identitatea $f(X) = a(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4)$.
 - Să se arate că $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_4) = 1$.
 - Să se arate că $(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3)(1 + x_4) = 5$.

2. Se consideră fracția $\frac{2}{11} = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$

- a) Să se calculeze a_1 și a_2 .
- b) Să se calculeze $S = a_2 + a_4 + \dots + a_{2002}$.
- c) Să se calculeze $T = a_1 + a_2 + \dots + a_{2002}$.

SUBIECTUL IV

Se consideră un triunghi ABC și M un punct situat în interiorul sau pe laturile triunghiului ABC . Se duc perpendiculare din punctul M pe laturile AB , BC și AC în D , E respectiv F . Notăm cu $h_a \leq h_b \leq h_c$ lungimile înălțimilor triunghiului ABC duse din A , B respectiv C .

- a) Să se verifice că $\frac{S_{AMB}}{S_{ABC}} + \frac{S_{BMC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{CMA}}{S_{ABC}} = 1$, unde prin S_{XYZ} am notat aria triunghiului XYZ .
- b) Să se deducă relația $\frac{MD}{h_c} + \frac{ME}{h_a} + \frac{MF}{h_b} = 1$.
- c) Să se verifice egalitatea $MD + ME + MF = \frac{MD}{h_c} \cdot h_c + \frac{ME}{h_a} \cdot h_a + \frac{MF}{h_b} \cdot h_b$.
- d) Să se arate că, dacă $x, y, z, a, b, c \in \mathbb{R}$, $x \leq y \leq z$ și $a, b, c \in [0, 1]$ cu $a + b + c = 1$, atunci $x \leq ax + by + cz \leq z$.
- e) Utilizând relațiile de la punctele b), c) și d), să se arate că $h_a \leq MD + ME + MF \leq h_c$, pentru orice punct M situat în interiorul sau pe laturile triunghiului ABC .

Varianta 2

SUBIECTUL I

1. Matematicianul Sorin a hotărât să publice articole de matematică. La vârsta de 21 de ani el publică un articol. Apoi, în fiecare an el publică un articol mai mult decât în anul precedent.
 - a) Să se afle câte articole a publicat Sorin după trei ani.
 - b) Să se afle câte articole a publicat Sorin în anul în care a avut vârsta de 30 de ani.
 - c) Să se determine cel mai mic număr natural n , cu proprietatea că, după n ani, Sorin a publicat mai multe articole decât dublul vârstei sale.
2. Un număr natural $n \geq 2$ se numește "plin de putere" dacă fiecare factor prim din descompunerea sa apare la o putere strict mai mare decât 1. (De exemplu, $72 = 2^3 \cdot 3^2$ este "plin de putere").
 - a) Să se verifice că numerele 8 și 9 sunt "pline de putere".
 - b) Să se verifice identitatea $4n(n+1) + 1 = (2n+1)^2$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$.
 - c) Să se arate că produsul a două numere "pline de putere" este un număr "plin de putere".
 - d) Să se găsească un număr natural n , $n \geq 10$, cu proprietatea că n și $n+1$ sunt numere "pline de putere".
3. Trei urne A , B , C conțin bile. O bilă din urna A cântărește 1 g, o bilă din urna B cântărește 2 g și o bilă din urna C cântărește 4 g. Se știe că oricare două urne au împreună de două ori mai multe bile decât în urna rămasă.
 - a) Să se arate că suma numărul bilelor din cele trei urne este de trei ori numărul bilelor din urna A .
 - b) Să se arate că în fiecare urnă avem același număr de bile.
 - c) Dacă cântărim trei bile și obținem 7 g, atunci să se precizeze din ce urnă a provenit fiecare bilă cântărită.

SUBIECTUL II

1. Pe mulțimea numerelor complexe se consideră legea de compoziție "o" definită prin $x \circ y = x + y + 1$.
 - a) Să se verifice că $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$, $(\forall) x, y, z \in \mathbb{C}$.
 - b) Să se găsească două elemente $a, b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, pentru care $a \circ b \in \mathbb{R}$.
 - c) Să se găsească cel mai mare număr natural n , pentru care $1 \circ 2 \circ \dots \circ n < 2002$.
 - d) Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $2^x \circ 4^x = 3$.
2. Se consideră mulțimea $A = \{4x + 5y \mid x, y \in \mathbb{N}\}$.
 - a) Să se verifice că numerele 12, 13, 14, 15 aparțin mulțimii A .
 - b) Să se arate că $11 \notin A$.
 - c) Să se arate că dacă $n \in \mathbb{N}$, $12 \leq n \leq 2002$, atunci $n \in A$.

SUBIECTUL III

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ se consideră submulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ și matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
 - a) Să se verifice că $I_2 \in G$.
 - b) Să se arate că dacă $A, B \in G$, atunci $A \cdot B \in G$.
 - c) Să se arate că dacă $A, B \in G$, atunci $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.
 - d) Să se găsească $A \in G$, $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, cu $b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ și $\det(A) = 1$.
2.
 - a) Să se verifice identitatea $(a^2 - 1)^2 + (2a)^2 = (a^2 + 1)^2$, $(\forall) a \in \mathbb{R}$.
 - b) Să se găsească o soluție $(x, y) \in (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}) \times (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$ a ecuației $x^2 + y^2 = 1$.
 - c) Să se arate că ecuația $x^2 + y^2 = 1$ are o infinitate de soluții în mulțimea $(\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}) \times (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$.

SUBIECTUL IV

Se consideră tetraedrul $ABCD$ cu înălțimile din A, B, C, D egale cu $h_A \leq h_B \leq h_C \leq h_D$. Dintr-un punct M situat în interiorul sau pe fețele tetraedrului ducem perpendiculare pe fețele BCD, ACD, ABD și ABC în E, F, G respectiv H .

- a) Să se verifice că $\frac{V_{MABC}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{MACD}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{MABD}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{MBCD}}{V_{ABCD}} = 1$, unde prin V_{XYZT} am notat volumul tetraedrului $XYZT$.
- b) Să se deducă relația $\frac{ME}{h_A} + \frac{MF}{h_B} + \frac{MG}{h_C} + \frac{MH}{h_D} = 1$.
- c) Să se verifice egalitatea $ME + MF + MG + MH = \frac{ME}{h_A} \cdot h_A + \frac{MF}{h_B} \cdot h_B + \frac{MG}{h_C} \cdot h_C + \frac{MH}{h_D} \cdot h_D$.
- d) Să se arate că, dacă $x, y, z, t, a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $x \leq y \leq z \leq t$ și $a, b, c, d \in [0, 1]$ cu $a + b + c + d = 1$, atunci $x \leq ax + by + cz + dt \leq t$.
- e) Utilizând relațiile de la punctele b), c) și d), să se arate că $h_A \leq ME + MF + MG + MH \leq h_D$, pentru orice punct M situat în interiorul tetraedrului $ABCD$.

Varianta 3

SUBIECTUL I

- Pentru efectuarea unor plăți, un casier are numai bancnote de 3 euro și de 5 euro în număr nelimitat.
 - Să se arate că nu poate achita exact 7 euro.
 - Să se arate că el poate achita exact 8 euro, 9 euro și 10 euro.
 - Să se arate că, dacă $n \in \mathbb{N}$, $8 \leq n \leq 2002$, atunci casierul poate achita exact n euro.
- Un număr natural $n \geq 2$ se numește *compus* dacă nu este număr prim.
 - Să se arate că numerele 8 și 9 sunt *compuse*.
 - Să se găsească patru numere naturale consecutive mai mici decât 100 care sunt *compuse*.
 - Să se arate că numerele $A_1 = 2003! + 2$, $A_2 = 2003! + 3$, ..., $A_{2002} = 2003! + 2003$ sunt 2002 numere naturale consecutive *compuse*.
- Patru frați A , B , C , D au împreună 20 de ani. Se știe că dublul vârstei lui B este suma vârstelor lui A și C , iar dublul vârstei lui C este suma vârstelor lui B și D . Se mai știe că A și B au împreună atâția ani cât are C .
 - Să se arate că suma vârstelor lui A și D este aceeași cu suma vârstelor lui B și C .
 - Să se afle vârsta lui B .
 - Să se afle vârstele lui A , C și D .

SUBIECTUL II

- În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.
 - Să se calculeze AB .
 - Să se calculeze $\det(A)$ și $\det(B)$.
 - Să se verifice că $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.
 - Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că
$$\det(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n) = \det(X_1) \cdot \det(X_2) \cdot \dots \cdot \det(X_n), (\forall) n \in \mathbb{N}^* \text{ și } (\forall) X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).$$
- Să se verifice că $\hat{x}^3 = \hat{x}$, $(\forall) x \in \mathbb{Z}_6$.
 - Să se arate că $\hat{x}^{2001} = \hat{x}$ și $\hat{x}^{2002} = \hat{x}^2$, $(\forall) x \in \mathbb{Z}_6$.
 - Să se arate că ecuația $\hat{x}^{2002} + \hat{x}^{2001} + \dots + \hat{x}^2 + \hat{x} + \hat{1}$ nu are soluție în inelul \mathbb{Z}_6 .

SUBIECTUL III

- Se consideră polinomul $f = X^4 + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.
 - Să se verifice că $f = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$.
 - Să se arate că polinomul f nu are rădăcini reale.
 - Să se calculeze $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.
 - Să se arate că $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = -4$.
 - Să se arate că polinomul f este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.
- Se consideră numerele $a_n = 2^{2n+1} + 1$, $n \in \mathbb{N}$.
 - Să se stabilească dacă numărul a_0 este prim.
 - Să se arate că numărul a_n nu este prim, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL IV

Pe planul dreptunghiului $ABCD$ cu laturile $AB = 4$ și $BC = 3$ se ridică perpendicularele $AA' = 2$, $BB' = 4$, $CC' = 8$ și $DD' = 6$.

- a) Să se calculeze lungimile segmentelor $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$.
- b) Să se verifice că $AA' + CC' = BB' + DD'$.
- c) Să se calculeze lungimile liniilor mijlocii în trapezele $AA'C'C$ și $BB'D'D$.
- d) Să se arate că punctele A' , B' , C' și D' sunt coplanare.
- e) Să se arate că patrulaterul $A'B'C'D'$ este paralelogram.
- f) Să se calculeze aria patrulaterului $A'B'C'D'$.

Varianta 4

SUBIECTUL I

- La un spectacol, 25% din spectatori sunt băieți și 75% sunt fete. Dintre băieți, 40% au ochi albaștri, iar dintre fete 20% au ochi albaștri. Se știe că în sala de spectacol sunt 300 de spectatori cu ochi albaștri.
 - Să se arate că 10% dintre spectatori sunt băieți care au ochi albaștri.
 - Să se arate că 15% dintre spectatori sunt fete care au ochi albaștri.
 - Să se afle numărul total de spectatori.
- Notăm cu A mulțimea numerelor naturale de trei cifre și cu B mulțimea numerelor naturale formate din trei cifre distincte. Precizăm că toate numerele despre care se discută în problemă sunt scrise în baza 10.
 - Să se determine numărul elementelor mulțimii A .
 - Să se determine numărul elementelor mulțimii B .
- La un turneu de tenis participă 128 de jucători. Înaintea fiecărui tur, se împart jucătorii în grupe de câte 2, care joacă între ei. Învinsul părăsește turneul. Turneul se termină când rămâne un singur jucător. Pentru participarea la turneu, jucătorii sunt premiați cu câte 100 de euro pentru fiecare meci jucat în turul 1, câte 200 de euro pentru fiecare meci jucat în turul 2, câte 300 de euro pentru fiecare meci jucat în turul 3, etc.
 - Să se afle câți euro au fost plătiți de organizatori pentru meciurile din primul tur.
 - Câți euro a câștigat un jucător care părăsește turneul în turul 3?
 - Câți euro primește câștigătorul turneului, dacă pentru victoria finală mai primește 1000 de euro?

SUBIECTUL II

- Se consideră mulțimea $A = \{\pm 1^2 \pm 2^2 \pm \dots \pm n^2 \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. De exemplu, $1 = 1^2$, $2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$, deci $1 \in A$ și $2 \in A$.
 - Să se arate că $3 \in A$ și $4 \in A$.
 - Să se verifice că $4 = (x+1)^2 - (x+2)^2 - (x+3)^2 + (x+4)^2$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că $p \in A$, $(\forall) p \in \mathbb{N}^*$.
 - Să se arate că $A = \mathbb{Z}$.
- Se consideră polinomul $f = (X+1)(X-1)(X-2) + 1$.
 - Să verifice că $f = X^3 - 2X^2 - X + 3$.
 - Să se arate că polinomul f nu are rădăcini raționale.
 - Să se arate că polinomul f este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

SUBIECTUL III

- În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ și submulțimea $G = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \mid AX = XA\}$.
 - Să se calculeze determinantul și rangul matricei A .
 - Să se verifice că $A^2 = -I_2$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
 - Să se verifice că $I_2 \in G$ și $A \in G$.
 - Să se găsească o matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, cu proprietatea că $AB \neq BA$.
 - Să se arate că, dacă $X \in G$, atunci există $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $X = aI_2 + bA$.
- Să se scrie numărul 4 ca o sumă de două numere naturale prime nu neapărat diferite.
 - Să se scrie numărul 8 ca o sumă de trei numere naturale prime nu neapărat diferite.
 - Să se arate că orice număr natural $n \geq 4$, se scrie ca o sumă de numere naturale prime, nu neapărat diferite.

SUBIECTUL IV

Se consideră triunghiul ABC și M un punct în planul său, din care ducem perpendiculare pe latura AB în D , pe latura BC în E și pe latura AC în F .

- a) Utilizând teorema lui Pitagora, să se arate că $AD^2 - BD^2 = MA^2 - MB^2$.
- b) Să se demonstreze că $AD^2 - BD^2 + BE^2 - EC^2 + CF^2 - FA^2 = 0$.
- c) Să se arate că, dacă X și Y sunt două puncte pe dreapta AB și $XA^2 - XB^2 = YA^2 - YB^2$, atunci $X = Y$.
- d) Să se arate că, dacă $X \in AB$, $Y \in BC$ și $Z \in AC$ astfel încât $XA^2 - XB^2 + YB^2 - YC^2 + ZC^2 - ZA^2 = 0$, atunci perpendicularele duse în X , Y respectiv Z pe laturile AB , BC respectiv AC sunt concurente.
- e) Să se arate că, dacă triunghiul ABC este echilateral, cu latura de lungime a și punctul M se află în interiorul triunghiului, atunci $AD + BE + CF = \frac{3a}{2}$.

Varianta 5

SUBIECTUL I

- O insulă vulcanică are înălțimea de 100 m. În fiecare an, datorită activității vulcanice, insula crește cu 5% din înălțimea sa.
 - Să se afle înălțimea insulei după un an.
 - Să se afle ce înălțime are insula după 2 ani.
 - Să se arate că, după 20 de ani, insula are cel puțin 200 m înălțime.
- Trei bile a , b și c cântăresc împreună 300 g. Se știe că suma greutateilor bilelor a și b este egală cu dublul greutății bilei c și că produsul greutateilor bilelor b și c este egală cu pătratul greutății bilei a .
 - Să se afle cât cântărește bila c .
 - Să se afle cât cântărește bila a .
 - Să se afle cât cântărește bila b .
- La un stadion cu capacitatea de 10000 locuri, vin spectatorii. În primul minut vine un spectator, în al doilea minut vin 3 spectatori, ... , în al n -lea minut sosesc $2n - 1$ spectatori.
 - Să se afle câți spectatori au venit după primele 5 minute.
 - Să se arate că $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
 - Să se determine cel mai mic număr natural n , cu proprietatea că, după n minute, stadionul este plin.

SUBIECTUL II

- Se consideră o mulțime A cu 10 elemente.
 - Să se determine numărul submulțimilor mulțimii A care au cel mult un element.
 - Să se determine numărul submulțimilor mulțimii A care au cel mult două elemente.
 - Să se arate că numărul submulțimilor mulțimii A care au un număr impar de elemente este egal cu numărul submulțimilor mulțimii A care au un număr par de elemente.
- În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, precum și submulțimea $G = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid AX = XA\}$.
 - Să se calculeze determinantul și rangul matricei A .
 - Să se verifice că $I_2 \in G$ și $A \in G$.
 - Să se arate că, dacă $a, b \in \mathbb{C}$, atunci $aI_2 + bA \in G$.
 - Să se arate că, dacă $X \in G$, atunci există $a, b \in \mathbb{C}$ astfel încât $X = aI_2 + bA$.

SUBIECTUL III

- Se consideră polinomul $f = (X - 1)(X - 2)(X - 3)(X - 4) + 1$.
 - Să se calculeze $f(0)$.
 - Să se arate că $f = (X^2 - 5X + 5)^2$.
 - Să se arate că $f(k) \geq 1$, $(\forall) k \in \mathbb{Z}$.
- Se consideră numerele $a_n = (n - 1)(n - 2)(n - 3)(n - 4)$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
 - Să se verifice că a_1, a_2, a_3 și a_4 sunt pătrate perfecte.
 - Să se arate că, dacă $n \geq 5$, atunci a_n nu este pătratul unui număr natural.

SUBIECTUL IV

Se consideră piramida $VABC$. Notăm cu G_1, G_2, G_3 respectiv G_4 centrele de greutate ale fețelor ABC, VBC, VAC respectiv VAB . Notăm cu D mijlocul segmentului BC .

- a) Să se arate că dreptele VG_1 și AG_2 sunt conținute în planul VAD .
- b) Să se arate că dreptele G_1G_2 și VA sunt paralele și $G_1G_2 = \frac{VA}{3}$.
- c) Să se arate că planele $(G_1G_2G_3)$ și (VAB) sunt paralele.
- d) Să se arate că raportul dintre aria triunghiului $G_1G_2G_3$ și aria triunghiului VAB este egal cu $\frac{1}{9}$.
- e) Știind că piramida $VABC$ are toate muchiile (laterale și ale bazei) egale, să se arate că raportul dintre volumul piramidei $G_1G_2G_3G_4$ și volumul piramidei $VABC$ este egal cu $\frac{1}{27}$.

SESIUNEA IUNIE-IULIE

Varianta 3

Profilul uman

SUBIECTUL I

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, precum și submulțimea $G = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3) \mid X^2 = I_2\}$.
- Să se verifice că $I_2 \in G$.
 - Să se arate că $A \in G$ și $B \in G$.
 - Să se calculeze AB .
 - Să se arate că $AB \notin G$.
 - Să se determine cel mai mic număr natural nenul n pentru care $(AB)^n = I_2$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2002} + x + 1$.
- Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
 - Să se arate că funcția f este convexă pe \mathbb{R} .
 - Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
 - Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^{2003}}$.

SUBIECTUL II

Pe mulțimea numerelor complexe se consideră legea de compoziție "o" definită prin $x \circ y = xy + ix + iy - 1 - i$.

- Să se verifice că $x \circ y = (x + i)(y + i) - i$, $(\forall) x, y \in \mathbb{C}$.
- Să se arate că $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$, $(\forall) x, y, z \in \mathbb{C}$.
- Să se găsească două elemente $a, b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ astfel încât $a \circ b \in \mathbb{R}$.
- Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că

$$x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n = (x_1 + i) \circ (x_2 + i) \circ \dots \circ (x_n + i) - i, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \text{ și } x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}.$$

- Să se rezolve în \mathbb{C} ecuația $x \circ x \circ x \circ x = 1 - i$.

SUBIECTUL III

Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^6$, $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ și $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^7 - 1$.

- Să se calculeze $f(1)$ și $g(1)$.
- Să se verifice că $(x - 1)f(x) = x^7 - 1$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
- Să se calculeze $g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- Să se arate că funcția g este strict crescătoare pe \mathbb{R} .

e) Să se arate că $f(x) > 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

f) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(n)}{nf(n)}$.

SUBIECTUL IV

Se consideră polinomul $f = X^4 - 14X^2 + 9$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

a) Să se verifice că $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 = 7 + 2\sqrt{10}$ și $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 = 7 - 2\sqrt{10}$.

b) Să se verifice că $f(-x) = f(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

c) Să se rezolve în \mathbb{C} ecuația $f(x) = 0$.

d) Să se arate că $f = (X - \sqrt{2} - \sqrt{5})(X - \sqrt{2} + \sqrt{5})(X + \sqrt{2} - \sqrt{5})(X + \sqrt{2} + \sqrt{5})$.

e) Să se calculeze $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

f) Să se arate că $x_1^{2003} + x_2^{2003} + x_3^{2003} + x_4^{2003} = 0$.

**BACALAUREAT 2002
SESIUNEA AUGUST**

Varianta 1

Profilurile matematică-fizică, informatică și metrologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \epsilon z + 1$, unde $\epsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
 - a) Să se verifice că $\epsilon^2 + \epsilon + 1 = 0$ și că $\epsilon^3 = 1$.
 - b) Să se arate că $(f \circ f \circ f)(z) = z$, $(\forall) z \in \mathbb{C}$.
 - c) Să se rezolve în \mathbb{C} ecuația $(f \circ f \circ f)(z) = z^4$.
2. Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
 - a) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
 - b) Să se verifice că $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
 - c) Să se arate că $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sqrt{n+1} - 1$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
 - d) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$.
3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(5, 12)$, $B(12, 5)$, $C(0, 13)$ și $O(0, 0)$.
 - a) Să se calculeze panta dreptei AB .
 - b) Să se scrie ecuația dreptei AC .
 - c) Să se verifice că $OA = OB = OC$.

SUBIECTUL II

1.
 - a) Să se determine numărul real a pentru care avem identitatea $C_x^2 = \frac{ax(x-1)}{2}$, $(\forall) x \in \mathbb{N}$, $x \geq 2$.
 - b) Să se rezolve în \mathbb{N} inecuația $C_n^2 < 6$, $n \geq 2$.
 - c) Să se verifice identitatea $C_x^y = C_{x+1}^{y+1} - C_x^{y+1}$, $(\forall) x, y \in \mathbb{N}$, $x > y \geq 0$.
 - d) Utilizând relația de la punctul c), să se arate că $C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \dots + C_{p+n}^p = C_{p+n+1}^{p+1} - 1$, $(\forall) p, n \in \mathbb{N}^*$.
2. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.
 - a) Să se calculeze $f'(x)$, $x > 0$.
 - b) Să se arate că $f(x) \leq f(e)$, $(\forall) x > 0$.
 - c) Să se deducă inegalitatea $x^e \leq e^x$, $(\forall) x > 0$.
 - d) Să se calculeze $\int_1^e f(x) dx$.

SUBIECTUL III

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$ se consideră submulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} \\ \hat{2}\hat{y} & \hat{x} \end{pmatrix} \mid \hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{Z}_5 \right\}$.

- a) Să se verifice că $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \in G$ și $O_2 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix} \in G$.
- b) Să se arate că, dacă $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{Z}_5$ și $\hat{x}^2 - \hat{2}\hat{y}^2 = \hat{0}$, atunci $\hat{x} = \hat{y} = \hat{0}$.

- c) Să se arate că, dacă $A, B \in G$, atunci $A + B \in G$ și $AB \in G$.
- d) Să se determine numărul elementelor mulțimii G .
- e) Să se arate că, dacă $A \in G$ și $A \neq O_2$, atunci există $B \in G$ astfel încât $AB = I_2$.
- f) Să se dea un exemplu de structură de corp cu 25 de elemente.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{2002}$ și $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

- a) Să se calculeze $f(1)$.
- b) Să se verifice că $(x - 1)f(x) = x^{2003} - 1$, $x \in \mathbb{R}$.
- c) Să se arate că $f(x) > 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
- d) Să se arate că $F'(x) = f(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
- e) Să se arate că funcția F este bijectivă.
- f) Notăm cu $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ inversa funcției F și cu $a = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2003}$. Să se calculeze $\int_0^a g(x) dx$.

Varianta 2

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul $f = X^4 + 4$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

- Să se verifice identitatea $f = (X^2 - 2X + 2)(X^2 + 2X + 2)$.
- Să se arate că polinomul f nu are rădăcini reale.
- Să se calculeze $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.
- Să se arate că $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = -16$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{-x^2}$.

- Să se calculeze $f'(x), x \in \mathbb{R}$.
- Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
- Să se determine intervalele de convexitate și de concavitate ale funcției f .

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuații:

$$d_1 : x + 2y + 3 = 0, \quad d_2 : 2x + y + 3 = 0, \quad d_3 : 3x + 4y + 7 = 0.$$

- Să se scrie determine coordonatele punctului de intersecție al dreptelor d_1 și d_2 .
- Să se arate că dreptele d_1, d_2 și d_3 sunt concurente.
- Să se scrie ecuația cercului cu centrul în $O(0, 0)$ și care trece prin punctul de concurență al celor trei drepte.

SUBIECTUL II

- Să se determine numărul real a pentru care avem identitatea $A_x^2 = ax(x - 1), (\forall) x \geq 2$.
 - Să se rezolve în \mathbb{N} inecuația $A_n^2 < 12, n \geq 2$.
 - Să se verifice identitatea $C_x^{y+1} = C_{x+1}^{y+1} - C_x^y, (\forall) x, y \in \mathbb{N}, x > y$.
 - Utilizând relația de la punctul c), să se arate că $C_p^r + C_{p+1}^{r+1} + \dots + C_{p+n}^{r+n} = C_{p+n+1}^{r+n} - C_p^{r-1}, (\forall) p, r, n \in \mathbb{N}^*, p > r$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{2003} + x + 1$.

- Să se calculeze $f'(x), x \in \mathbb{R}$.
- Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- Să se arate că funcția f este bijectivă.
- Notăm cu $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ inversa funcției f . Să se calculeze $\int_1^3 g(x) dx$.

SUBIECTUL III

În mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_3)$ se consideră submulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{c} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \mid \hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \in \mathbb{Z}_3 \right\}$ și matricea $I_3 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$.

- Să se verifice că $I_3 \in G$.
- Să se arate că, dacă $A, B \in G$ atunci $A \cdot B \in G$.
- Să se arate că, oricare ar fi matricea $A \in G$, avem $A^3 = I_3$.
- Să se găsească două matrice $A, B \in G$ pentru care $AB \neq BA$.
- Să se dea un exemplu de structură de grup necomutativ cu 27 de elemente, (H, \cdot) , în care $x^3 = e, (\forall) x \in H$, unde e este elementul neutru al grupului H .

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x + m^x - 4^x - 5^x$, unde $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$.

- a) Să se determine $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- b) Să se calculeze $f(0)$ și $f'(0)$.
- c) Să se determine $m > 0$ astfel încât $f(x) \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- d) Pentru $m = 10$, să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.
- e) Să se demonstreze că, dacă $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $0 < a < b < c < d$ și $a + d = b + c$, atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, are loc relația $a^n + d^n > b^n + c^n$.
- f) Considerând $m = 10$, să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, avem $f^{(n)}(0) > 0$. (Am notat prin $f^{(n)}$ derivata de ordinul n a funcției f).

Varianta 3

SUBIECTUL I

- Se consideră polinomul $f = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$.
 - Să se determine restul împărțirii polinomului f la polinomul $X - 1$.
 - Să se rezolve în \mathbb{C} ecuația $f(x) = 0$.
 - Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $f(2^x) = 0$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1)^5 + (x - 1)^5$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
 - Să se determine intervalele de convexitate și de concavitate ale funcției f .
 - Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x) dx$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră cercul de ecuație $x^2 + y^2 = 25$.
 - Să se scrie determine coordonatele centrului cercului și raza cercului.
 - Să se verifice că punctul $A(3, 4)$ se află pe cerc.
 - Să se arate că dreapta de ecuație $3x + 4y - 25 = 0$ este tangentă la cerc în punctul $A(3, 4)$.

SUBIECTUL II

- Pe mulțimea \mathbb{R} se consideră legea de compoziție "o", definită prin $x \circ y = x + y - 1$.
 - Să se verifice că $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$, $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R}$.
 - Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $2^x \circ 4^x = 5$.
 - Să se rezolve în \mathbb{N}^* ecuația $C_n^0 \circ C_n^1 \circ C_n^2 = 44 + n$.
 - Să se rezolve în \mathbb{R} inecuația $x \circ x^2 \leq 1$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - e^{-x}$.
 - Să se verifice că $f(-x) = -f(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că funcția f este bijectivă.
 - Notăm cu $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ inversa funcției f . Să se calculeze $g'(0)$.

SUBIECTUL III

Se consideră polinoamele $f = a + bX + cX^2 + dX^3$ și $g = X^4 - 1$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, iar g are rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

Se mai consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$ și $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{pmatrix}$.

- Să se verifice că $g = (X^2 - 1)(X^2 + 1)$.
- Să se arate că $\det(V) \neq 0$.
- Să se arate că $AV = \begin{pmatrix} f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) & f(x_4) \\ x_1 f(x_1) & x_2 f(x_2) & x_3 f(x_3) & x_4 f(x_4) \\ x_1^2 f(x_1) & x_2^2 f(x_2) & x_3^2 f(x_3) & x_4^2 f(x_4) \\ x_1^3 f(x_1) & x_2^3 f(x_2) & x_3^3 f(x_3) & x_4^3 f(x_4) \end{pmatrix}$.

- d) Utilizând relația de la punctul c), să se arate că $\det(A) = f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)$.
- e) Pentru $a = c = d = 0$ și $b = 1$, să se calculeze A^2 și A^4 .
- f) Pentru $a = c = d = 0$ și $b = 1$, să se arate că matricea A este inversabilă și să se calculeze inversa sa.

SUBIECTUL IV

Se consideră $n \in \mathbb{N}^*$ și funcțiile $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}x^n$, $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 1 - e^{-x} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right)$ și $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x f(t) dt$.

- a) Să se calculeze $g(0)$ și $h(0)$.
- b) Să se verifice că $g'(x) = h'(x)$, $(\forall) x \geq 0$.
- c) Să se arate că $g(x) = h(x)$, $(\forall) x \geq 0$.
- d) Să se arate că $0 \leq g(x) \leq \frac{e^{-x}x^{n+1}}{n!}$, $(\forall) x \in [0, n]$.
- e) Să se arate că, dacă $x \geq 0$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = 0$.
- f) Să se demonstreze că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) = e^x$, $(\forall) x \geq 0$.

SESIUNEA AUGUST

Varianta 1

Profilurile economic, fizică-chimie, chimie-biologie, militar real, industrial, agricol, silvic, sportiv real

SUBIECTUL I

- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + m$, unde m este un parametru real.
 - Să se determine valorile parametrului m , astfel încât $f(x) \geq 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Pentru $m = 0$, să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.
 - Pentru $m = 0$, să se rezolve ecuația $f(2^x) = 8$.
 - Pentru $m = 0$, să se rezolve inecuația $f(x) \leq 0$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctg x$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
 - Să se determine intervalele de convexitate și de concavitate ale funcției f .
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1, 2)$, $B(2, 1)$, $C(3, 3)$.
 - Să se calculeze lungimea segmentului AB .
 - Să se determine panta dreptei AB .
 - Să se scrie ecuația dreptei BC .

SUBIECTUL II

- Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f = (X + 1)^{10}$, cu forma algebrică $f = a_{10}X^{10} + a_9X^9 + \dots + a_1X + a_0$.
 - Să se calculeze $f(0)$.
 - Să se calculeze suma coeficienților polinomului f .
 - Să se arate că $a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{10} = \frac{f(1) + f(-1)}{2}$.
- Se consideră funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$.
 - Să se verifice că $f(x) = x + \frac{1}{x + 1}$, $(\forall) x \geq 0$.
 - Să se determine asimptotele la graficul funcției f .
 - Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

SUBIECTUL III

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, precum și submulțimea $G = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid AX = XA\}$.

- Să se calculeze determinantul și rangul matricei A .
- Să se verifice că $I_2 \in G$ și $A \in G$.
- Să se arate că $XA^2 = A^2X$, $(\forall) X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
- Să se găsească o matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $AB \neq BA$.

- e) Să se arate că, dacă $a, b \in \mathbb{C}$, atunci $aI_2 + bA \in G$.
- f) Să se arate că, dacă $X \in G$, atunci există $x, y \in \mathbb{C}$ astfel încât $X = xI_2 + yA$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^x$.

- a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- b) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $f^{(n)}(x) = e^x(x^2 + 2nx + n(n-1))$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
(S-a notat prin $f^{(n)}$ derivata de ordinul n a funcției f).
- c) Să se arate că $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1) \cdot n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
- d) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(0) + f''(0) + \dots + f^{(n)}(0)}{n^3}$.
- e) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- f) Să se găsească o funcție $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, indefinit derivabilă, cu proprietatea că $g^{(n)}(0) = n(n+1)$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

Varianta 2

SUBIECTUL I

- Se consideră polinomul $f = X^4 + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.
 - Să se verifice identitatea $f = (X^2 - X\sqrt{2} + 1)(X^2 + X\sqrt{2} + 1)$.
 - Să se arate că polinomul f nu are rădăcini reale.
 - Să se calculeze $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.
 - Să se arate că $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = -4$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1)^4 + (x - 1)^4$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
 - Să se arate că funcția f este convexă pe \mathbb{R} .
 - Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x) dx$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(6, 8)$, $B(8, 6)$, $C(0, 10)$.
 - Să se determine panta dreptei AB .
 - Să se scrie ecuația dreptei AC .
 - Să se verifice că $OA = OB = OC$.

SUBIECTUL II

- Pe mulțimea \mathbb{R} se consideră legea de compoziție "o", definită prin $x \circ y = x + y + 1$.
 - Să se verifice că $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$, $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R}$.
 - Să se găsească două elemente $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, cu proprietatea că $a \circ b \in \mathbb{Z}$.
 - Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $x \circ (2x) \circ \dots \circ (2002x) = 2001$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x + 9}{x^2 + 1}$.
 - Să se determine asimptotele la graficul funcției f .
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

SUBIECTUL III

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, precum și submulțimea $G = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3) \mid X^2 = I_2\}$.

- Să se verifice că $I_2 \in G$.
- Să se arate că $A \in G$ și $B \in G$.
- Să se arate că $AB \neq BA$.
- Să se arate că $AB \notin G$.
- Să se determine cel mai mic număr natural nenul n , cu proprietatea că $(AB)^n = I_2$.
- Să se arate că mulțimea G are cel puțin 6 elemente.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

- a) Să se determine asimptota verticală a graficului funcției f .
- b) Să se determine asimptota la $+\infty$ a graficului funcției f .
- c) Să se arate că $f(x) - 1 + x - x^2 \leq 0$, $(\forall) x \geq 0$.
- d) Să se arate că $f(x) - 1 + x - x^2 + x^3 \geq 0$, $(\forall) x \geq 0$.
- e) Să se deducă inegalitățile $1 - x + x^2 - x^3 \leq \frac{1}{1+x} \leq 1 - x + x^2$, $(\forall) x \geq 0$.
- f) Să se arate că aria cuprinsă între graficul funcției $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{1+x^9}$, axa Ox și dreptele $x = 0$ și $x = 1$, este un număr real cuprins în intervalul $(0, 91; 0, 96)$.

Varianta 3

SUBIECTUL I

- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 6x + 6$.
 - Să se verifice că $f(x) = (x + 3)^2 - 3$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că $f(x) \geq -3$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $f(2^x) = 22$.
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + e^{-x}$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
 - Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x) dx$.
- În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(-1, -1)$, $C(-1, 1)$.
 - Să se calculeze lungimea segmentului AB .
 - Să se determine panta dreptei AB .
 - Să se scrie ecuația dreptei AC .

SUBIECTUL II

- Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f = (X + 1)^{10} + (X - 1)^{10}$ cu forma algebrică $f = a_{10}X^{10} + a_9X^9 + \dots + a_1X + a_0$.
 - Să se calculeze $f(0)$.
 - Să se calculeze suma coeficienților polinomului f .
 - Să se arate că $a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{10} = \frac{f(1) + f(-1)}{2}$.
- Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4x}{4x^4 + 1}$ și $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{2x^2 - 2x + 1}$. Se mai consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, definit prin $a_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
 - Să se arate că $f(x) = g(x) - g(x + 1)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că $a_n = 1 - \frac{1}{2n^2 + 2n + 1}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
 - Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
 - Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

SUBIECTUL III

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ se consideră submulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} \mid a^2 - 3b^2 = 1, a, b \in \mathbb{Q} \right\}$.

- Să se verifice că $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.
- Să se arate că, dacă $A, B \in G$, atunci $AB \in G$.
- Să se arate că, dacă $X \in G$, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}$, atunci X este matrice inversabilă și $X^{-1} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -3b & a \end{pmatrix}$.
- Să se găsească o matrice $A \in G$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}$ cu $b \neq 0$.

- e) Să se arate că, dacă $B \in G$, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}$ cu $a > 0$, $b > 0$, atunci $B^n \neq I_2$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
- f) Să se arate că mulțimea G este infinită.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $g(x) = \operatorname{arctg} x - x$ și șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definit prin $a_0 = 1$ și $a_{n+1} = f(a_n)$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$.

- a) Să se calculeze $f'(x)$ și $g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- b) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe \mathbb{R} și că funcția g este strict descrescătoare pe \mathbb{R} .
- c) Să se arate că $g(x) = 0$ dacă și numai dacă $x = 0$.
- d) Să se arate că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este descrescător și mărginit.
- e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- f) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

SESIUNEA AUGUST

Varianta 1

Profilul pedagogic

SUBIECTUL I

- Se consideră mulțimea A compusă din toate numerele de patru cifre distincte, scrise în baza 10, formate cu cifrele 1, 2, 3 și 4.
 - Să se determine numărul elementelor mulțimii A .
Se ordonează crescător elementele mulțimii A . (Pe locul întâi este cel mai mic element, pe locul doi este următorul, etc.).
 - Să se determine elementul din mulțimea A , situat pe locul trei.
 - Să se afle pe ce loc se găsește elementul 4132 în mulțimea A .
- Un călător are de parcurs o distanță între două orașe. În prima zi el a parcurs jumătate din distanță și încă un kilometru. A doua zi el a parcurs jumătate din distanța rămasă și încă un kilometru. A treia zi a parcurs ultimii 30 de kilometri.
 - Să se determine distanța parcursă de călător în ziua a doua.
 - Să se determine distanța parcursă de călător în prima zi.
 - Să se afle câte zile ar fi durat călătoria, dacă în fiecare zi călătorul ar fi parcurs jumătate din distanța rămasă și încă un kilometru.
- Se consideră numărul $a = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 50$.
 - Să se determine numărul de zerouri cu care se termină numărul a în scrierea zecimală.
 - Să se arate că numărul a nu este pătratul unui număr natural.
 - Să se arate că numărul a nu este cubul unui număr natural.

SUBIECTUL II

- În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$.
 - Să se calculeze AB .
 - Să se calculeze $\det(A)$ și $\det(B)$.
 - Să se verifice că $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.
 - Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $\det(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n) = \det(X_1) \cdot \det(X_2) \cdot \dots \cdot \det(X_n)$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$ și $(\forall) X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
- Se consideră polinomul $f = X^4 + 4$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.
 - Să se verifice că $f = (X^2 - 2X + 2)(X^2 + 2X + 2)$.
 - Să se arate că polinomul f nu are rădăcini reale.
 - Să se calculeze $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.
 - Să se calculeze $T = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$.

SUBIECTUL III

- Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție "o", definită prin $x \circ y = x + y - 1$.
 - Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R}$.
 - Să se determine numărul real e , pentru care $x \circ e = e \circ x = x$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

- c) Să se arate că numărul $1 \circ 2 \circ \dots \circ 2002$ nu este pătratul unui număr natural.
 - d) Să se găsească două elemente $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, pentru care $a \circ b \in \mathbb{Q}$.
- 2.
- a) Să se găsească două numere naturale c și d , cu proprietatea că $c^2 + d^2 = 41$.
 - b) Să se arate că nu există două numere naturale x și y , cu proprietatea că $x^2 + y^2 = 43$.

SUBIECTUL IV

Pe planul dreptunghiului $ABCD$ cu laturile $AB = 8$ și $BC = 6$ se ridică perpendicularele $AA' = 8$, $BB' = 4$, $CC' = 2$ și $DD' = 6$.

- a) Să se calculeze lungimile segmentelor $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$ și $A'D'$.
- b) Să se verifice că $AA' + CC' = BB' + DD'$.
- c) Să se calculeze lungimile liniilor mijlocii în trapezele $AA'C'C$ și $BB'D'D$.
- d) Să se arate că punctele A' , B' , C' și D' sunt coplanare.
- e) Să se arate că patrulaterul $A'B'C'D'$ este paralelogram.
- f) Să se calculeze aria patrulaterului $A'B'C'D'$.

Varianta 2

SUBIECTUL I

- Într-o cofetărie, o bomboană costă 2 euro și o ciocolată costă 7 euro. Un copil are 45 euro și cumpără bomboane și ciocolată. Numim ”combinație de bomboane și ciocolate de 45 euro” un număr de bomboane și un număr de ciocolate care costă împreună 45 euro. De exemplu, 19 bomboane și o ciocolată constituie ”combinație de bomboane și ciocolate de 45 euro”.
 - Să se găsească o altă ”combinație de bomboane și ciocolate de 45 euro”.
 - Să se determine numărul maxim de ciocolate pe care îl poate conține o ”combinație de bomboane și ciocolate de 45 euro”.
 - Să se găsească numărul total de ”combinații de bomboane și ciocolate de 45 euro”.
- Un autoturism costă la lansarea pe piață 10000 euro. După fiecare an, prețul său scade cu 20% din valoarea avută la începutul anului.
 - Să se afle cât va costa autoturismul peste un an.
 - Să se determine prețul autoturismului după trei ani.
 - Să se determine cel mai mic număr natural n , cu proprietatea că după n ani autoturismul va costa mai puțin de 5000 euro.
- Se consideră numărul natural $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$.
 - Să se determine numărul divizorilor naturali ai numărului a .
 - Să se calculeze suma tuturor divizorilor naturali ai numărului a .
 - Să se calculeze produsul tuturor divizorilor naturali ai numărului a .

SUBIECTUL II

- Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție ” \circ ”, definită prin $x \circ y = x + y - 1$.
 - Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R}$.
 - Să se găsească două elemente $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, pentru care $a \circ b \in \mathbb{Z}$.
 - Să se determine cel mai mare număr natural n , pentru care $1 \circ 2 \circ \dots \circ n < 2002$.
 - Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $2^x \circ 4^x = 5$.
- Se consideră mulțimea $A = \{3x + 4y \mid x, y \in \mathbb{N}\}$.
 - Să se verifice că numerele 6, 7, 8 aparțin mulțimii A .
 - Să se arate că $5 \notin A$.
 - Să se arate că, dacă $n \in A$, atunci $n + 3 \in A$.
 - Să se arate că, dacă $n \in \mathbb{N}$, $6 \leq n \leq 2002$, atunci $n \in A$.

SUBIECTUL III

- În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ se consideră submulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ și matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
 - Să se verifice că $I_2 \in G$.
 - Să se arate că, dacă $A, B \in G$, atunci $A \cdot B \in G$.
 - Să se arate că, dacă $A, B \in G$, atunci $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.
 - Să se arate că, dacă $A \in G$ și $\det(A) = 1$, atunci $A^4 = I_2$.
- Să se verifice identitatea $(a^2 - 1)^2 + (2a)^2 = (a^2 + 1)^2$, $(\forall) a \in \mathbb{R}$.
 - Să se găsească o soluție $(x, y) \in (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}) \times (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$ a ecuației $x^2 + y^2 = 1$.
 - Să se arate că ecuația $x^2 + y^2 = 1$ are o infinitate de soluții în mulțimea $(\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}) \times (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$.

SUBIECTUL IV

Piramida patrulateră regulată cu vârful V și baza $ABCD$ are $VA = AB = a$.

- a) Să se calculeze apotema piramidei.
- b) Să se calculeze aria laterală a piramidei.
- c) Să se calculeze înălțimea piramidei.
- d) Să se calculeze volumul piramidei.
- e) Să se arate că muchiile VA și VC sunt perpendiculare.
- f) Fie punctul $P \in (VC)$. Să se determine lungimea segmentului PC , astfel încât perimetrul triunghiului BPD să fie minim.

Varianta 3

SUBIECTUL I

- La examenul de bacalaureat, proba de limba și literatura română, o elevă a scris 15 pagini numerotate de la 1 la 15.
 - Să se afle de câte ori a folosit cifra 1 pentru numerotarea paginilor.
 - Să se afle suma numerelor tuturor paginilor.
 - Să se determine suma tuturor cifrelor folosite pentru numerotarea paginilor.
- Într-o fermă sunt găini și fiecare dintre ele face exact câte un ou la două zile. În prima zi fermierul a luat 23 de ouă, iar a doua zi a luat 17 ouă.
 - Să se afle câte găini sunt la fermă.
 - Să se afle câte ouă a strâns fermierul după 10 zile.
 - Să se afle cel mai mic număr natural nenul n , cu proprietatea că la sfârșitul zilei n , fermierul a strâns în total cel puțin 2002 ouă.
- Se consideră numerele raționale $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, unde $a_1 = 2, a_2 = 6$ și $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n-1}}, (\forall) n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
 - Să se determine numerele $a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$.
 - Să se determine a_{2002} .
 - Să se calculeze $S = a_1 + a_2 + \dots + a_{2002}$.

SUBIECTUL II

- Se consideră mulțimea $M = \{a^2 - 2b^2 \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.
 - Să se verifice că $0 \in M$ și $1 \in M$.
 - Să se verifice identitatea $(a^2 - 2b^2)(c^2 - 2d^2) = (ac + 2bd)^2 - 2(ad + bc)^2, (\forall) a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.
 - Să se arate că, dacă $x, y \in M$, atunci $x \cdot y \in M$.
 - Să se arate că $3 \notin M$.
- În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{2} & \hat{2} \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, precum și submulțimea $G = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3) \mid X^2 = I_2\}$.
 - Să se verifice că $I_2 \in G$.
 - Să se arate că $A \in G$ și $B \in G$.
 - Să se arate că $AB \notin G$.
 - Să se afle cel mai mic număr natural nenul n , pentru care $(AB)^n = I_2$.

SUBIECTUL III

- Se consideră polinomul $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, având rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.
 - Să se calculeze $f(1)$ și $f(-1)$.
 - Să se determine $a \in \mathbb{C}$ astfel încât să avem identitatea $f = a(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4)$.
 - Să se arate că $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_4) = 5$.
 - Să se arate că $(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3)(1 + x_4) = 1$.
- Se consideră numerele $a = 11 \cdot 12 \cdot \dots \cdot 20, b = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 10$ și $c = 21 \cdot 22 \cdot \dots \cdot 30$.
 - Să se arate că numărul a nu este pătratul unui număr natural.
 - Să se arate că numărul b divide numărul a .

- c) Să se arate că numărul a nu divide numărul c .

SUBIECTUL IV

Se consideră un triunghi ABC și M un punct situat în interiorul sau pe laturile triunghiului ABC . Se duc perpendiculare din punctul M pe dreptele AB , BC și AC în D , E respectiv F . Notăm cu $h_a \leq h_b \leq h_c$ lungimile înălțimilor triunghiului ABC duse din A , B respectiv C .

- a) Să se verifice că $\frac{S_{AMB}}{S_{ABC}} + \frac{S_{BMC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{CMA}}{S_{ABC}} = 1$, unde prin S_{XYZ} am notat aria triunghiului XYZ .
- b) Să se arate că $\frac{S_{AMB}}{S_{ABC}} = \frac{MD}{h_c}$.
- c) Să se deducă relația $\frac{MD}{h_c} + \frac{ME}{h_a} + \frac{MF}{h_b} = 1$.
- d) Să se verifice egalitatea $MD + ME + MF = \frac{MD}{h_c} \cdot h_c + \frac{ME}{h_a} \cdot h_a + \frac{MF}{h_b} \cdot h_b$.
- e) Să se arate că, dacă $x, y, z, a, b, c \in \mathbb{R}$, $x \leq y \leq z$ și $a, b, c \in [0, 1]$ cu $a + b + c = 1$, atunci $x \leq ax + by + cz \leq z$.
- f) Utilizând relațiile de la punctele c), d) și e), să se arate că $h_a \leq MD + ME + MF \leq h_c$, pentru orice punct M situat în interiorul sau pe laturile triunghiului ABC .

SESIUNEA AUGUST

Varianta 1

Profilul uman

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul $f = X^4 + X^3 + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.
 - a) Să se verifice că $f = \left(1 - \frac{X^2}{2}\right)^2 + \left(X + \frac{X^2}{2}\right)^2 + \frac{X^4}{2}$.
 - b) Să se arate că $f(x) > 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - c) Să se arate că polinomul f nu are rădăcini reale.
 - d) Să se determine $a \in \mathbb{C}$ pentru care avem identitatea $f = a(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4)$.
 - e) Să se arate că $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_4) = 3$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x + 1}{(x^2 + 2)(x^2 + 2x + 3)}$.
 - a) Să se verifice că $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2} - \frac{1}{(x + 1)^2 + 2}$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - b) Să se determine asimptotele la graficul funcției f .
 - c) Să se arate că $f(1) + f(2) + \dots + f(n) = \frac{1}{3} - \frac{1}{(n + 1)^2 + 2}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
 - d) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(1) + f(2) + \dots + f(n))$.
 - e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(f(1) + f(2) + \dots + f(n) - \frac{1}{3} \right)$.

SUBIECTUL II

Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție "o", definită prin $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2$.

- a) Să se verifice că $x \circ y = 3(x + 1)(y + 1) - 1$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$.
- b) Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R}$.
- c) Să se verifice că $x \circ (-1) = (-1) \circ x = -1$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
- d) Să se găsească două elemente $a, b \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$, pentru care $a \circ b \in \mathbb{Z}$.
- e) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$, avem $a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_n = 3^{n-1} \cdot (a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot \dots \cdot (a_n + 1) - 1$, $(\forall) a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.
- f) Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $x \circ x \circ x \circ x = -1$.

SUBIECTUL III

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, precum și submulțimea $G = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid AX = XA\}$.

- a) Să se verifice că $A \in G$ și $I_2 \in G$.
- b) Să se calculeze determinantul matricei A .
- c) Să se verifice că $A^2 = -I_2$.
- d) Să se arate că $A^2X = XA^2$, $(\forall) X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
- e) Să se arate că, dacă $a, b \in \mathbb{C}$, atunci matricea $B = aI_2 + bA \in G$.

f) Să se arate că, dacă $X \in G$, atunci există $x, y \in \mathbb{C}$ astfel încât $X = xI_2 + yA$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$.

- a) Să se verifice că $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2 + 1}$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
- b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- c) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $(-\infty, 0]$ și strict descrescătoare pe $[0, \infty)$.
- d) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- f) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(f(n) - 1)$.

Varianta 2

SUBIECTUL I

1.
 - a) Să se verifice că $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$, $(\forall) a, b, c \in \mathbb{C}$.
 - b) Să se arate că, dacă $a, b, c \in \mathbb{C}$ și $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3$, atunci $a + b = 0$ sau $b + c = 0$ sau $c + a = 0$.
 - c) Să se arate că, dacă $a, b, c \in \mathbb{C}$ și $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3$, atunci $(a + b + c)^{2003} = a^{2003} + b^{2003} + c^{2003}$.
 - d) Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $(2^x + 3^x - 4^x)^3 = 2^{3x} + 3^{3x} - 4^{3x}$.
 - e) Să se rezolve în \mathbb{C} ecuația $(x^2 + x + 1)^3 = x^6 + x^3 + 1$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2002} + 1$.
 - a) Să se calculeze $f'(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
 - b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
 - c) Să se arate că funcția f este convexă pe \mathbb{R} .
 - d) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
 - e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf'(x)}{f(x)}$.

SUBIECTUL II

Se consideră polinomul $f = X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

- a) Să se verifice că $f = \left(X^2 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}X + 1\right) \left(X^2 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}X + 1\right)$.
- b) Să se arate că polinomul f nu are rădăcini reale.
- c) Să se arate că $X^5 + 1 = (X + 1) \cdot f$.
- d) Să se arate că, dacă $z \in \mathbb{C}$ este rădăcina polinomului f , atunci $z^5 = -1$.
- e) Să se arate că $x_1^{10} + x_2^{10} + x_3^{10} + x_4^{10} = 4$.
- f) Să se arate că $\frac{1}{x_1^5} + \frac{1}{x_2^5} + \frac{1}{x_3^5} + \frac{1}{x_4^5} = -4$.

SUBIECTUL III

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ se consideră matricele $P = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, precum și submulțimea $G = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \mid A^2 = I_2\}$.

- a) Să se verifice că $I_2 \in G$.
- b) Să se arate că $P \in G$ și $Q \in G$.
- c) Să se calculeze $P \cdot Q$.
- d) Să se arate că $P \cdot Q \notin G$.
- e) Să se arate că, dacă $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & -1 \end{pmatrix}$, $(\forall) n \in \mathbb{Z}$, atunci $A_n \in G$, $(\forall) n \in \mathbb{Z}$.
- f) Să se demonstreze că mulțimea G este infinită.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x + 1$ și șirul $(a_n)_{n \geq 2}$, definit prin $a_n = \frac{2^3 + 1}{2^3 - 1} \cdot \frac{3^3 + 1}{3^3 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{n^3 + 1}{n^3 - 1}$,
 $(\forall) n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

- a) Să se verifice că $f(x+1) = x^2 + x + 1$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
- b) Să se arate că $\frac{x^3 + 1}{x^3 - 1} = \frac{x + 1}{x - 1} \cdot \frac{f(x)}{f(x+1)}$, $(\forall) x > 1$.
- c) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $a_n = \frac{3n(n+1)}{2(n^2 + n + 1)}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
- d) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^n f(x) dx}{n^3}$.

Varianta 3

SUBIECTUL I

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție "o", definită prin $x \circ y = xy + 3x + 3y + 6$.
- Să se verifice că $x \circ y = (x + 3)(y + 3) - 3$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$.
 - Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall) x, y, z \in \mathbb{R}$.
 - Să se găsească două elemente $a, b \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$, pentru care $a \circ b \in \mathbb{N}$.
 - Să se rezolve în intervalul $(0, \infty)$ ecuația $(\log_2 x) \circ (\log_3 x) = -3$.
 - Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $(x + 1) \circ (x^2 - 4) = -3$.
2. Se consideră funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(x + 1)(x + 2)}$.
- Să se verifice că $f(x) = \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x + 2}$, $(\forall) x \in [0, \infty)$.
 - Să se calculeze $f'(x)$, $x \in [0, \infty)$.
 - Să se determine asimptotele la graficul funcției f .
 - Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
 - Să se calculeze $f(1) + f(2) + \dots + f(n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n + 2}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
 - Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(1) + f(2) + \dots + f(n))$.

SUBIECTUL II

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$.

- Să se calculeze AB și BA .
- Să se arate că suma elementelor de pe diagonala principală a matricelor AB și BA este aceeași.
- Să se arate că $\det(A + B) + \det(A - B) = 2(\det(A) + \det(B))$.
- Să se demonstreze că $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.
- Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $\det(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = \det(A_1) \cdot \det(A_2) \cdot \dots \cdot \det(A_n)$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$ și $(\forall) A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
- Să se arate că $\det(A^n) = \det^n(A)$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$ și $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

SUBIECTUL III

Se consideră mulțimea $M = \{a^2 - 2b^2 \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

- Să se verifice că $0 \in M$ și $1 \in M$.
- Să se verifice identitatea $(a^2 - 2b^2)(c^2 - 2d^2) = (ac + 2bd)^2 - 2(ad + bc)^2$, $(\forall) a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.
- Să se arate că, dacă $x, y \in M$, atunci $x \cdot y \in M$.
- Să se arate că, dacă $\hat{a} \in \mathbb{Z}_3$, atunci $\hat{a}^2 \in \{\hat{0}, \hat{1}\}$.
- Să se arate că, dacă $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_3$ și $\hat{a}^2 - \hat{b}^2 = \hat{0}$, atunci $\hat{a} = \hat{b} = \hat{0}$.
- Să se arate că $M \neq \mathbb{Z}$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x^2 + x^4$.

- a) Să se verifice că $f(x) = \frac{x^6 + 1}{x^2 + 1}$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
- b) Să se arate că $f(x) \geq \frac{1}{1 + x^2}$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
- c) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- d) Să se determine punctele de extrem local ale funcției f .
- e) Să se determine punctele de inflexiune ale funcției f .
- f) Notăm cu $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a funcției f . Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf(x)}{F(x)}$.