BACALAUREAT 2004
SESIUNEA SPECIALĂ

M1

Filiera teoretică, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profil Militar, specializarea matematică - informatică.

SUBIECTUL I

Pentru întrebările 1-5 scrieţi litera corespunzătoare răspunsului corect pe foaia de examen

1. Câte elemente din mulţimea $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ se divid cu 2 sau cu 3?

a) 8; **b)** 5; **c)** 6; **d)** 7

2. Care este probabilitatea ca un element din mulţimea $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ să fie număr prim?

a) $0,5$; **b)** $0,4$; **c)** $0,6$; **d)** $0,3$

3. Câte elemente inversabile faţă de înmulţire are inelul $\mathbb{Z}_9$?

a) 4; **b)** 5; **c)** 6; **d)** 7

4. Câte elemente de ordinul 5 are grupul $(\mathbb{Z}_5, +)$?

a) 4; **b)** 3; **c)** 1; **d)** 2

5. Câte funcţii bijective definite pe mulţimea $\{1, 2, 3\}$ cu valori în mulţimea $\{4, 5, 6\}$ există?

a) 6; **b)** 5; **c)** 9; **d)** 7

Pentru întrebările 6-10 scrieţi doar răspunsurile pe foaia de examen

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - x|$.

6. Câte puncte de discontinuitate are funcţia f?

7. În câte puncte nu este derivabilă funcţia f?

8. Care este aria suprafeţei plane conţinută între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele $x = 0$ şi $x = 1$?

9. Cum este funcţia f pe intervalul $(0, 1)$: convexă sau concavă?

10. Cât este $\lim\limits_{n\to\infty} (f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(n))$?

Pentru subiectele II-IV se cer rezolvările complete

SUBIECTUL II

Într-un plan se consideră patrulaterul convex $ABCD$, având laturile $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ şi $AD = d$. Notăm $2p = a + b + c + d$, cu B măsura unghiului $\sphericalangle ABC$, cu D măsura unghiului $\sphericalangle ADC$ şi cu S aria patrulaterului $ABCD$.

a) Să se arate că $2S = ab \sin B + cd \sin D$.

b) Să se deducă relaţia $4S^2 = a^2b^2 \sin^2 B + c^2d^2 \sin^2 D + 2abcd \sin B \sin D$.

c) Utilizând teorema cosinusurilor în triunghiurile ABC şi ADC, să se arate că $a^2 + b^2 - 2ab \cos B = c^2 + d^2 - 2cd \cos D$.

d) Să se deducă egalitatea $(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4a^2b^2 \cos^2 B + 4c^2d^2 \cos^2 D - 8abcd \cos B \cos D$.

e) Utilizând formula $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$ şi relaţiile de la punctele b) şi d) , să se arate că $16S^2 = 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 8abcd \cos(B + D)$.

f) Utilizând formula $\cos x = 2\cos^2 \dfrac{x}{2} - 1$, să se arate că $S^2 = (p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - abcd \cos^2 \dfrac{B + D}{2}$.

SUBIECTUL III

Se consideră numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ distincte şi $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ arbitrare, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.
Definim polinoamele $w_1 = \dfrac{(X-a_2)(X-a_3)\ldots(X-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)}$, $w_2 = \dfrac{(X-a_1)(X-a_3)\ldots(X-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)}, \ldots,$
$w_n = \dfrac{(X-a_1)(X-a_2)\ldots(X-a_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})}$ şi $L_n = b_1w_1 + b_2w_2 + \ldots + b_nw_n$.

a) Să se verifice că $w_i(a_j) = 0$, $(\forall)\ i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

b) Să se verifice că $w_1(a_1) = w_2(a_2) = \ldots = w_n(a_n) = 1$.

c) Să se verifice că $\text{grad}(w_1) = \text{grad}(w_2) = \ldots = \text{grad}(w_n) = n-1$.

d) Să se arate că polinomul L_n are gradul cel mult $n-1$ şi $L_n(a_k) = b_k$, $(\forall)\ k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

e) Să se arate că dacă $f \in \mathbb{R}[X]$, $\text{grad}(f) \leq n-1$ şi $f(a_k) = b_k$, $(\forall)\ k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, atunci $f = L_n$.

f) Să se arate că $(17a_1+11)w_1 + (17a_2+11)w_2 + \ldots + (17a_n+11)w_n = 17X + 11$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha - \alpha x$, unde $\alpha \in (0, 1)$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x > 0$.

b) Să se arate că $f'(x) > 0$, $(\forall)\ x \in (0, 1)$ şi $f'(x) < 0$, $(\forall)\ x \in (1, \infty)$.

c) Să se deducă inegalitatea $x^\alpha - \alpha x \leq 1 - \alpha$, $(\forall)\ x > 0$.

d) Alegând $x = \dfrac{a}{b}$, cu $a, b > 0$ şi notând $\beta = 1 - \alpha$, să se arate că $a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b$, $(\forall)\ a, b > 0$ şi $(\forall)\ \alpha, \beta > 0$ cu $\alpha + \beta = 1$.

e) Să se arate că $st \leq \dfrac{s^p}{p} + \dfrac{t^q}{q}$, $(\forall)\ s, t > 0$ şi $(\forall)\ p, q > 1$ cu $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

f) Utilizând inegalitatea de la punctul e), să se arate că, dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ şi $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sunt numere reale strict pozitive, $p, q > 1$ cu $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, atunci $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \leq (a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (b_1^q + b_2^q + \ldots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}$.

g) Să se demonstreze că, dacă $h, g : [0, 1] \to (0, \infty)$ sunt două funcţii continue şi $p, q > 1$ cu $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, atunci $\displaystyle\int_0^1 h(x)g(x)\, dx \leq \left(\int_0^1 h^p(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_0^1 g^q(x)\, dx\right)^{\frac{1}{q}}$.

SESIUNEA SPECIALĂ

M1

Filiera teoretică, specializarea Ştiinţe ale naturii
Filiera tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

SUBIECTUL I

Pentru întrebările 1-5 scrieţi litera corespunzătoare răspunsului corect pe foaia de examen

1. Câte este C_{10}^2?

a) 45; **b)** 50; **c)** 55; **d)** 90

2. Câte elemente inversabile faţă de înmulţire are inelul $\mathbb{Z}_6$?

a) 5; **b)** 4; **c)** 3; **d)** 2

3. Câte soluţii are ecuaţia $\hat{x}^2 = \hat{x}$ în inelul $\mathbb{Z}_8$?

a) 6; **b)** 4; **c)** 2; **d)** 5

4. Cât este suma $1 + 3 + 5 + \ldots + 99$?

a) 10000; **b)** 2500; **c)** 5000; **d)** 3000

5. Care este probabilitatea ca un element din mulţimea $\{1, 2, \ldots, 10\}$ să fie număr par?

a) $0,6$; **b)** $0,5$; **c)** $0,4$; **d)** $0,55$

Pentru întrebările 6-10 scrieţi doar răspunsurile pe foaia de examen

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^4}$.

6. Cât este $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$?

7. Cât este $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$?

8. Câte puncte de extrem local are funcţia f?

9. Câte puncte de inflexiune are graficul funcţiei f?

10. Cât este $\displaystyle\int_0^1 f'(x)\, dx$?

Pentru subiectele II-IV se cer rezolvările complete

SUBIECTUL II

Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, se consideră numărul complex $z_n = n^2 + i$. Notăm cu $\alpha_n = \text{arctg}\dfrac{1}{n^2}$ şi cu $r_n = \sqrt{n^4 + 1}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că $|z_n| = r_n$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

b) Să se verifice că $z_n = r_n(\cos\alpha_n + i\sin\alpha_n)$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se determine $x \in \mathbb{R}$, astfel încât să avem adevărată identitatea

$z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = x + r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n \cdot (\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n))$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

d) Să se arate că $\dfrac{1}{(x+1)^2} < \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$, $(\forall)\ x > 0$.

e) Utilizând identitatea $\text{arctg}\dfrac{1}{x} - \text{arctg}\dfrac{1}{x+1} = \text{arctg}\dfrac{1}{x^2 + x + 1}$, $(\forall)\ x > 0$, să se arate că

$\text{arctg}\dfrac{1}{2^2} + \text{arctg}\dfrac{1}{3^2} + \ldots + \text{arctg}\dfrac{1}{n^2} < \dfrac{\pi}{4}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. (*Nu se cere demonstraţia identităţii*)

f) Să se arate că produsul $z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n$ este un număr complex care are partea reală şi partea imaginară strict pozitive.

SUBIECTUL III

Se consideră mulţimile $A = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f(x) = ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0\}$, $B = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} \,|\, g(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + \ldots + a_0,\ a_4, a_3, \ldots, a_0 \in \mathbb{R},\ a_4 \neq 0$, $C = \{u \circ v \,|\, u, v \in A\}$, unde "$\circ$" reprezintă operaţia de compunere a funcţiilor.

a) Să se arate că dacă $u,\ v \in A$, atunci $u \circ v \in B$.

b) Să se verifice dacă $f \in A$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, atunci $f\left(-\dfrac{b}{2a} + x\right) = f\left(-\dfrac{b}{2a} - x\right)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

c) Să se găsească o funcţie $g \in B$ cu proprietatea $g(1 - x) = g(1 + x)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

d) Să se arate că funcţia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^4 + x + 1$ are proprietatea că $(\forall)\ a \in \mathbb{R}$, există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $h(a - x) \neq h(a + x)$.

e) Utilizând relaţia de la punctul b), să se arate că dacă $w \in C$, atunci există $c \in \mathbb{R}$, astfel încât $w(c-x) = w(c+x)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

f) Să se arate că mulţimea $B - C$ este nevidă.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$ şi $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

a) Să se verifice identitatea $F(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

b) Să se verifice că $F'(x) = f(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

c) Să se arate că $(x - 1)F(x) = x^5 - 1$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

d) Să se arate că $F(x) > 0$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

e) Să se arate că funcţia F este convexă pe $\mathbb{R}$.

f) Să se calculeze $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f(1) + f(2) + \ldots + f(n)}{F(n)}$.

SESIUNEA IUNIE-IULIE

M1

Filiera teoretică, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profil Militar, specializarea matematică - informatică.

SUBIECTUL I

Pentru întrebările 1-5 scrieţi litera corespunzătoare răspunsului corect pe foaia de examen

1. Care este restul împărţirii polinomului $X^5 - 1$ la polinomul $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$?

a) 0; **b)** 1; **c)** -1; **d)** X

2. Câte submulţimi cu 2 elemente are o mulţime cu 5 elemente?

a) 15; **b)** 5; **c)** 20; **d)** 10

3. Cât este suma $\hat{1} + \hat{2} + \ldots + \hat{6}$ în grupul $(\mathbb{Z}_7, +)$?

a) $\hat{3}$; **b)** $\hat{2}$; **c)** $\hat{1}$; **d)** $\hat{0}$

4. Care este probabilitatea ca un element al inelului $\mathbb{Z}_{10}$ să fie inversabil faţă de înmulţire?

a) $0,4$; **b)** $0,3$; **c)** $0,5$; **d)** $0,6$

5. Câte soluţii reale are ecuaţia $2^x = 3^x$?

a) 0; **b)** 1; **c)** 2; **d)** 3

Pentru întrebările 6-10 scrieţi doar răspunsurile pe foaia de examen

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x} + e^{-2x}$.

6. Cât este $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$?

7. Care este aria suprafeţei plane cuprinsă între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele $x = 0$ şi $x = 1$?

8. Câte puncte de inflexiune are graficul funcţiei f?

9. Cât este $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$?

10. Câte puncte de extrem local are funcţia f?

Pentru subiectele II-IV se cer rezolvările complete

SUBIECTUL II

Într-un plan se consideră triunghiul ABC şi punctele $D, E \in (BC)$, astfel încât $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAE = \alpha$. Dacă XYZ este un triunghi, notăm cu S_{XYZ} suprafaţa sa.

a) Să se determine numărul real x, pentru care avem egalitatea $S_{BAD} = x \cdot AB \cdot AD \cdot \sin \alpha$.

b) Să se arate că $\dfrac{S_{BAD} \cdot S_{BAE}}{S_{CAD} \cdot S_{CAE}} = \dfrac{BD \cdot BE}{CD \cdot CE}$.

c) Să se arate că $\dfrac{S_{BAD} \cdot S_{BAE}}{S_{CAD} \cdot S_{CAE}} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$.

d) Să se calculeze expresia $\dfrac{BD \cdot BE \cdot AC^2}{CD \cdot CE \cdot AB^2}$.

e) Să se arate că, dacă în plus, AE este mediană, atunci $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$.

f) Să se arate că dacă punctele $M, N \in (BC)$ şi $\dfrac{BM \cdot BN}{CM \cdot CN} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$, atunci $\sphericalangle BAM = \sphericalangle CAN$.

SUBIECTUL III

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = I_3 + A$.

a) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

b) Dacă $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ şi $Y = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, să se calculeze matricea $S = A - X \cdot Y$.

c) Să se verifice că $A^2 = 10A$.

d) Să se arate că matricea B este inversabilă şi inversa sa este matricea $B^{-1} = I_3 - \frac{1}{11}A$.

e) Să se găsească trei matrice U, V, $W \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ de rang 1, astfel încât $B = U + V + W$.

f) Să se arate că oricare ar fi două matrice, C, $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ de rang 1, avem $C + D \neq B$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţiile $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin $f_0(x) = 1 - \cos x$ şi $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\, dt$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

a) Să se verifice că $f_1(x) = x - \sin x$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $f_2(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că

$$f_{2n+1}(x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots + (-1)^n \frac{x}{1!} + (-1)^{n+1} \sin x,\ (\forall)\ n \in \mathbb{N},\ (\forall)\ x \in \mathbb{R}.$$

d) Să se arate că graficul funcţiei f_1 nu are asimptotă către $+\infty$.

e) Să se arate că $0 \leq f_n(x) \leq 2 \cdot \frac{x^n}{n!}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, $(\forall)\ x > 0$. (*Reamintim că* $0! = 1$)

f) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$, $(\forall)\ x > 0$.

g) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = \sin x$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

SESIUNEA IUNIE-IULIE

M1

Filiera teoretică, specializarea Ştiinţe ale naturii
Filiera tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

SUBIECTUL I

Pentru întrebările 1-5 scrieţi litera corespunzătoare răspunsului corect pe foaia de examen

1. Câte submulţimi cu 2 elemente are o mulţime cu 5 elemente?

a) 10; **b)** 25; **c)** 32; **d)** 20

2. În câte moduri se pot permuta cele 4 litere a, b, c, d astfel încât literele a şi b să fie mereu alăturate?

a) 20; **b)** 12; **c)** 24; **d)** 6

3. Câte rădăcini raţionale are polinomul $X^3 + X^2 + X + 1$?

a) 3; **b)** 2; **c)** 1; **d)** 0

4. Care este suma rădăcinilor polinomului $X^3 + X^2 + X + 1$?

a) 1; **b)** 0; **c)** 3; **d)** -1

5. Care este produsul rădăcinilor polinomului $X^3 + X^2 + X + 1$?

a) 1; **b)** -1; **c)** 3; **d)** -3

Pentru întrebările 6-10 scrieţi doar răspunsurile pe foaia de examen

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

6. Cât este $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$?

7. Cât este $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$?

8. Câte puncte de extrem local are funcţia f?

9. Cât este $\displaystyle\int_{-1}^{1} xf(x)\, dx$?

10. Cât este $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$?

Pentru subiectele II-IV se cer rezolvările complete

SUBIECTUL II

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_k(1, k)$, $B_k(2, k)$ şi $C_k(3, k)$, $(\forall)$ $k \in \{1, 2, 3\}$. Notăm mulţimea $\{A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3\}$ cu M. Spunem că o mulţime P cu $2n$, $n \in \mathbb{N}^*$, puncte distincte din plan este "*echilibrată*" dacă poate fi împărţită în două submulţimi R şi Q, disjuncte, cu câte n elemente şi cu proprietatea că suma absciselor punctelor din mulţimea R este egală cu suma absciselor punctelor di mulţimea Q, iar suma ordonatelor punctelor din mulţimea R este egală cu suma ordonatelor punctelor din mulţimea Q.

a) Să se calculeze suma absciselor punctelor din mulţimea M.

b) Să se calculeze suma ordonatelor punctelor din mulţimea M.

c) Să se arate că orice mulţime formată din două puncte distincte din plan nu este "*echilibrată*".

d) Să se găsească o mulţime "*echilibrată*", formată din patru puncte distincte din plan.

e) Să se arate că mulţimea $M - \{B_2\}$ este "*echilibrată*".

f) Să se arate că pentru orice punct $X \in M - \{B_2\}$, mulţimea $M - \{X\}$ nu este "*echilibrată*".

SUBIECTUL III

În mulţimea $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ se consideră submulţimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ şi matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Să se verifice că $O_2 \in G$ şi $I_2 \in G$.

b) Să se arate că dacă A, $B \in G$, atunci $A \cdot B \in G$.

c) Să se arate că dacă A, $B \in G$, atunci $A + B \in G$.

d) Să se arate că dacă $X \in G$, atunci $\det(X) \neq 2$.

e) Să se găsească două matrice P, $Q \in G$, P, $Q \neq O_2$ astfel încât $PQ = O_2$.

f) Să se găsească o matrice $M \in G$, cu proprietatea că $\det(M) = 2004$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

c) Să se arate că funcţia f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

d) Să se determine asimptotala graficul funcţie f către $-\infty$.

e) Să se arate că funcţia F este convexă pe $\mathbb{R}$.

f) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

SESIUNEA IUNIE-IULIE

M2

Filiera tehnologică, profil Servicii, toate specializările; profil Resurse naturale şi protecţia mediului, toate specializările

SUBIECTUL I

Pentru întrebările 1-5 scrieţi litera corespunzătoare răspunsului corect pe foaia de examen

1. Care este partea reală a numărului complex i^{100}?

a) 1; **b)** 101; **c)** 100; **d)** 0

2. Câte numere impare are mulţimea $\{C_9^0, C_9^1, \dots, C_9^9\}$?

a) 6; **b)** 7; **c)** 5; **d)** 4

3. Care este partea întreagă a numărului $(1+\sqrt{2})^2$?

a) 3; **b)** 4; **c)** 5; **d)** 6

4. Care este probabilitatea ca un element din mulţimea $\{\sqrt{n}\,|\,n = 0, 1, 2, \dots, 9\}$ să fie număr raţional?

a) $0,1$; **b)** $0,2$; **c)** $0,3$; **d)** $0,4$

5. Dacă mulţimea A are 10 elemente, mulţimea B are 10 elemente şi mulţimea $A \cap B$ are 2 elemente, câte elemente are mulţimea $(A \cup B) - (A \cap B)$?

a) 16; **b)** 18; **c)** 14; **d)** 20

Pentru întrebările 6-10 scrieţi doar răspunsurile pe foaia de examen

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.

6. Cât este $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$?

7. Cât este $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$?

8. Cât este $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$?

9. Care este ecuaţia asimptotei către $-\infty$ la graficul funcţiei f?

10. Cât este $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{f'(x)}$?

Pentru subiectele II-IV se cer rezolvările complete

SUBIECTUL II

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(n, 1)$ şi $B_n(n, 2)$, unde $n \in \{1, 2, 3, 4\}$. Notăm cu M mulţimea $\{A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4\}$.

a) Să se scrie ecuaţia dreptei A_1A_2.

b) Să se calculeze lungimea segmentului A_2B_1.

c) Care este aria triunghiului $A_1B_2B_3$?

d) Care este numărul dreptelor care trec prin cel puţin două puncte din mulţimea M?

e) Câte triunghiuri au toate vârfurile în mulţimea M?

SUBIECTUL III

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde a, b, c, $d \in \mathbb{Q}$.

a) Să se verifice că $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I_2 = O_2$.

b) Să se verifice identitatea $X^2 - 3I_2 = (X - \sqrt{3}I_2)(X + \sqrt{3}I_2)$, $(\forall)\ X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Q})$.

c) Să se arate că dacă polinomul $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^2 - (a+d)X + ad - bc$ are o rădăcină egală cu $\sqrt{3}$, atunci $a + d = 0$ şi $ad - bc = -3$.

d) Să se găsească o matrice $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Q})$, cu proprietatea $B^2 = 3I_2$.

e) Să se arate că $\det(XY) = \det(X) \cdot \det(Y)$, $(\forall)\ X, Y \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Q})$.

f) Să se arate că dacă $\det(X^2 - 3I_2) = 0$, unde $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Q})$, atunci $X^2 = 3I_2$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{4x+4}{x^2(x+2)^2}$ şi şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $a_n = f(1) + f(3) + \ldots + f(2n-1)$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se verifice că $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x+2)^2}$, $(\forall)\ x \in (0, \infty)$.

b) Să se determine ecuaţia asimptotei verticale a graficului funcţiei f.

c) Să se calculeze $\displaystyle\int_1^2 f(x)\ dx$.

d) Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că $a_n = 1 - \dfrac{1}{(2n+1)^2}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

e) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

f) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(a_n - 1)$.

SESIUNEA IUNIE-IULIE

M2
Proba F

Filiera vocaţională, profil Artistic, specializările: Arhitectură, arte ambientale şi design; profil Militar, specializarea Ştiinţe sociale
Filiera teoretică, specializarea Ştiinţe sociale

SUBIECTUL I

Pentru întrebările 1-5 scrieţi litera corespunzătoare răspunsului corect pe foaia de examen

1. Câte este C_8^2?

a) 28; **b)** 30; **c)** 56; **d)** 64

2. Câte numere prime are mulţimea $\{1, 2, \ldots, 20\}$?

a) 10; **b)** 9; **c)** 8; **d)** 7

3. Dacă mulţimea $A - B$ are 5 elemente şi mulţimea $B - A$ are 3 elemente, câte elemenete are mulţimea $(A \cup B) - (A \cap B)$?

a) 5; **b)** 6; **c)** 7; **d)** 8

4. Care este probabilitatea ca un element din mulţimea $\{1, 2, \ldots, 10\}$ să se dividă cu 6?

a) $0,16$; **b)** $0,2$; **c)** $0,25$; **d)** $0,1$

5. Cât este suma $1 + 4 + 7 + \ldots + 31$?

a) 170; **b)** 176; **c)** 180; **d)** 160

Pentru întrebările 6-10 scrieţi doar răspunsurile pe foaia de examen

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x$.

6. Cât este $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$?

7. Cât este $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$?

8. Cât este $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$?

9. Câte puncte de extrem local are funcţia f?

10. Cât este $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{xf(x)}{\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt}$?

Pentru subiectele II-IV se cer rezolvările complete

SUBIECTUL II

Într-un plan se consideră triunghiul dreptunghic ABC, unde $\hat{A} = 90°$, $AB = 10$ şi $AC = 24$.

a) Să se calculeze lungimea ipotenuzei BC.

b) Să se calculeze aria triunghiului ABC.

c) Să se calculeze $\cos B$.

d) Să se calculeze $\sin B$.

e) Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că $\cos nB \in \mathbb{Q}$ şi $\sin nB \in \mathbb{Q}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$. (*Se pot utiliza formulele* $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$, *şi* $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$).

SUBIECTUL III

În mulţimea $\mathbb{Z}[X]$, se consideră submulţimea $A = \{X^2 + aX + b \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\}$. Mai considerăm mulţimea $B = \{r \in \mathbb{R} \,|\, (\exists)\, f \in A$ astfel încât $f(r) = 0\}$.

a) Să se găsească un polinom $f \in A$, astfel încât $f(5) = 0$.

b) Să se arate că $1 + \sqrt{2} \in B$.

c) Să se arate că dacă $n \in \mathbb{N}$, atunci $\sqrt{n} \in B$.

d) Să se arate că $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin B$.

e) Să se arate că dacă $a \in B$ şi $k \in \mathbb{Z}$, atunci $a + k \in B$.

f) Să se demonstreze că $B \cap \left(0, \frac{1}{2}\right) \neq \emptyset$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$ şi şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $a_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$.

a) Să se verifice că $x = 0$ este asimptotă verticală la graficul funcţiei f.

b) Să se determine ecuaţia asimptotei către $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c) Să se arate că $a_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

e) Să se calculeze $\int_1^2 f(x)\, dx$.

f) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n^3 \left(\int_1^n f(x)\, dx - a_n + \frac{1}{2}\right)$.

SESIUNEA IUNIE-IULIE

M3
Proba F

Filiera Teoretică,sp.Filologie; Filiera Vocaţională: profil Artistic, sp.:Arte plastice şi decorative, Coregrafie, Muzică şi Teatru;
profil Pedagogic, toate specializările;profil Educaţie fizică şi sport ;
profil Militar, sp. Muzici militare; profil Teologic, toate specializările

SUBIECTUL I

Pentru întrebările 1-5 scrieţi litera corespunzătoare răspunsului corect pe foaia de examen

1. Câte submulţimi ale mulţimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ conţin mulţimea $\{1, 2\}$?

a) 8; **b)** 10; **c)** 9; **d)** 25

2. Câte elemente din mulţimea $\{1, 2, \ldots, 30\}$ se divid cu 2 sau cu 3?

a) 25; **b)** 20; **c)** 15; **d)** 22

3. Cât este C_7^5?

a) 42; **b)** 35; **c)** 28; **d)** 21

4. Câte numere de 4 cifre se pot forma utilizând numai cifre din mulţimea $\{2, 3\}$?

a) 16; **b)** 8; **c)** 12; **d)** 14

5. În câte moduri putem permuta elementele mulţimii $\{a, b, c\}$?

a) 3; **b)** 4; **c)** 9; **d)** 6

Pentru întrebările 6-10 scrieţi doar răspunsurile pe foaia de examen

Se consideră triunghiul dreptunghic ABC care are catetele de 12 şi 35.

6. Care este lungimea ipotenuzei?

7. Care este lungimea medianei care cade pe ipotenuză?

8. Care este lungimea înălţimii care cade pe ipotenuză?

9. Care este aria triunghiului ABC?

10. Care este perimetrul triunghiului cu vârfurile în mijloacele laturilor triunghiului ABC?

Pentru subiectele II-IV se cer rezolvările complete

SUBIECTUL II

Spunem că o mulţime nevidă şi finită de numere naturale distincte şi nenule este "*interesantă*" dacă orice submulţime nevidă a sa are media aritmetică a elementelor număr natural.

a) Să se verifice că mulţimea $A = \{2, 4, 6\}$ este "*interesantă*".

b) Să se găsească o mulţime "*interesantă*" care are 4 elemente.

c) Să se găsească o mulţime de 5 elemente, care nu este "*interesantă*".

d) Să se arate că nu există o mulţime "*interesantă*" cu 4 elemente, care conţine mulţimea $\{2, 4, 6\}$.

e) Să se găsească o mulţime "*interesantă*" cu 2004 elemente.

SUBIECTUL III

Se consideră în plan o mulţime M formată din 6 puncte. Notăm cu $n(M)$ numărul dreptelor ce trec prin cel puţin câte 2 puncte ale mulţimii M.

a) Să se verifice că $n(M) \geq 1$.

b) Să se arate că $n(M) \leq 15$.

c) Să se găsească o mulţime S formată din 6 puncte din plan, pentru care $n(S) = 15$.

d) Să se arate că $n(M) \neq 14$.

e) Să se găsească o mulţime T formată din 6 puncte din plan, pentru care $n(T) = 1$.

f) Dacă E este o mulţime din plan formată din 6 puncte şi $n(E) \neq 1$, să se arate că $n(E) \geq 6$.

SUBIECTUL IV

Se consideră mulţimea $A = \{4p + 5q \,|\, p, q \in \mathbb{N}\}$.

a) Să se arate că $12 \in A$ şi $13 \in A$.

b) Să se arate că $14 \in A$ şi $15 \in A$.

c) Să se arate că $11 \notin A$.

d) Să se arate că $n \in A$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, $n \geq 12$.

e) Să se determine numărul de elemente ale mulţimii $\{n \in \mathbb{N} \,|\, n \notin A\}$.

f) Să se determine suma elementelor mulţimii $\{n \in \mathbb{N} \,|\, n \notin A\}$.

SESIUNEA AUGUST-SEPTEMBRIE

M1

Filiera teoretică, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profil Militar, specializarea matematică - informatică.

SUBIECTUL I

Pentru întrebările 1-5 scrieţi litera corespunzătoare răspunsului corect pe foaia de examen

1. Câte numere de trei cifre se pot forma utilizând numai cifre din mulţimea $\{1, 2\}$?

a) 6; **b)** 7; **c)** 8; **d)** 9

2. Cât este suma $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} + \hat{5}$ în grupul $(\mathbb{Z}_6, +)$?

a) $\hat{3}$; **b)** $\hat{2}$; **c)** $\hat{1}$; **d)** $\hat{0}$

3. Cât este produsul $\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \ldots \cdot \hat{6}$ în corpul $(\mathbb{Z}_7, +)$?

a) $\hat{6}$; **b)** $\hat{2}$; **c)** $\hat{3}$; **d)** $\hat{4}$

4. Câte soluţii are ecuaţia $2^{x^2} = 2^x$ în mulţimea numerelor reale?

a) 1; **b)** 2; **c)** 3; **d)** 4

5. Care este probabilitatea ca un element din mulţimea $\{1, 2, \ldots, 10\}$ să fie număr par?

a) $0,4$; **b)** $0,6$; **c)** $0,7$; **d)** $0,5$

Pentru întrebările 6-10 scrieţi doar răspunsurile pe foaia de examen

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 1$.

6. Cât este $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$?

7. Cât este $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$?

8. Câte puncte de inflexiune are graficul funcţiei f?

9. Cât este $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$?

10. Cât este $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^4} \int_0^x f(t)\, dt$?

Pentru subiectele II-IV se cer rezolvările complete

SUBIECTUL II

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $M(a, b)$, $N(c, 0)$, $P(d, 0)$, $Q(e, 0)$, unde $c < d < e$. Mai considerăm într-un plan triunghiul ABC, punctul G situat la intersecţia medianelor (centrul de greutate al triunghiului ABC) şi un punct S în acest plan. Notăm cu D mijlocul segmentului (BC).

a) Să se verifice că $MN^2 = (a - c)^2 + b^2$ şi $NP = d - c$.

b) Să se arate că $MN^2 \cdot PQ - MP^2 \cdot NQ + MQ^2 \cdot NP = NP \cdot PQ \cdot NQ$.

c) Utilizând relaţia de la punctul b), să se arate că $4AD^2 = 2(AB^2 + AC^2) - BC^2$.

d) Care este valoarea raportului $\dfrac{GD}{AD}$? (*Nu se cere justificarea răspunsului*)

e) Utilizând relaţia de la punctul b), să se arate că $9SG^2 = 3SA^2 + 6SD^2 - 2AD^2$.

f) Să se demonstreze că $9SG^2 = 3(SA^2 + SB^2 + SC^2) - (AB^2 + BC^2 + AC^2)$.

SUBIECTUL III

În mulţimea $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, precum şi submulţimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \middle| \; z, w \in \mathbb{C} \right\}$, unde prin $\overline{z}$ am notat conjugatul numărului complex z.

a) Să se verifice că $I_2 \in G$ şi $O_2 \in G$.

b) Să se arate că, dacă z, $w \in \mathbb{C}$ şi $|z|^2 + |w|^2 = 0$, atunci $z = w = 0$.

c) Să se arate că, dacă P, $Q \in G$, atunci $P \cdot Q \in G$.

d) Să se arate că, dacă $D \in G$, $D \neq O_2$, atunci D este matrice inversabilă şi $D^{-1} \in G$.

e) Să se găsească o matrice $X \in G$, cu proprietatea că $XC \neq CX$, unde $C = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$.

f) Să se arate că, dacă A, $B \in G$ şi $A \cdot B = O_2$, atunci $A = O_2$ sau $B = O_2$.

g) Să se arate că mulţimea $H = G - \{O_2\}$, împreună cu operaţia de înmulţire a matricelor, determină o structură de grup necomutativ.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + x) - x$ şi şirul $(I_n)_{n \geq 1}$, definit prin $I_n = n \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{2004 + x^n}\, dx$, oricare ar fi $n \geq 1$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x > -1$.

b) Să se calculeze $f(0)$ şi $f'(0)$.

c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei f.

d) Să se arate că $0 \leq \ln(1 + x) \leq x$, oricare ar fi $x \geq 0$.

e) Utilizând metoda integrării prin părţi, să se arate că $I_n = \ln \dfrac{2005}{2004} - \displaystyle\int_0^1 \ln\left(1 + \frac{x^n}{2004}\right) dx$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

f) Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} I_n$.

SESIUNEA AUGUST-SEPTEMBRIE

M1

Filiera teoretică, specializarea Ştiinţe ale naturii
Filiera tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

SUBIECTUL I

Pentru întrebările 1-5 scrieţi litera corespunzătoare răspunsului corect pe foaia de examen

Polinomul $f = X^2 + X + 1$ are rădăcinile $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$. Notăm cu $S_n = x_1^n + x_2^n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Care este restul împărţirii polinomului $X^3 - 1$ la polinomul f?

a) X; **b)** 1; **c)** 0; **d)** $-X$

2. Cât este modulul rădăcinii x_1?

a) 1; **b)** 2; **c)** 0, 5; **d)** $\sqrt{2}$

3. Cât este x_1^3?

a) 0; **b)** 1; **c)** -1; **d)** 2

4. Cât este S_3?

a) 1; **b)** 2; **c)** 0; **d)** -1

5. Care este probabilitatea ca S_n să fie egal cu 2 când $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$?

a) 0, 6; **b)** 0, 4; **c)** 0, 2; **d)** 0, 8

Pentru întrebările 6-10 scrieţi doar răspunsurile pe foaia de examen

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3x$.

6. Cât este $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$?

7. Cât este $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$?

8. Câte puncte de inflexiune are graficul funcţiei f?

9. Câte puncte de extrem local are funcţia f?

10. Care este aria suprafeţei plane cuprinsă între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = 1$?

Pentru subiectele II-IV se cer rezolvările complete

SUBIECTUL II

În plan se consideră un triunghi ABC şi L un punct pe segmentul (BC). Se mai consideră patrulaterul convex $MNPQ$, iar R şi S sunt mijloacele diagonalelor MP şi NQ.

a) Să se determine $x \in \mathbb{R}$, astfel încât să avem egalitatea $AL^2 = x + AB^2 + BL^2 - 2 \cdot AB \cdot BL \cdot \cos(\sphericalangle ABC)$.

b) Să se determine $y \in \mathbb{R}$, astfel încât să avem egalitatea $AC^2 = y + AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(\sphericalangle ABC)$.

c) Utilizând relaţiile de la punctele a) şi b), să se arate că $AL^2 \cdot BC = AB^2 \cdot LC + AC^2 \cdot LB - BL \cdot CL \cdot BC$.

d) Să se arate că, dacă D este mijlocul laturii BC, atunci $4AD^2 = 2(AB^2 + AC^2) - BC^2$.

e) Să se arate că $4SR^2 = 2MS^2 + 2SP^2 - MP^2$.

f) Utilizând relaţia de la punctul d) în triunghiurile MNQ şi PNQ şi relaţia de la punctul e), să se arate că $4SR^2 = MN^2 + NP^2 + PQ^2 + QM^2 - (MP^2 + QN^2)$.

SUBIECTUL III

Se consideră polinomul $f = (X + i)^{10} + (X - i)^{10}$ având forma algebrică $f = a_{10}X^{10} + a_9X^9 + \ldots + a_1X + a_0$.

a) Să se calculeze $f(0)$.

b) Să se determine a_{10} şi a_9.

c) Să se calculeze suma coeficienţilor polinomului f.

d) Să se arate că polinomul f are toţi coeficienţii numere reale.

e) Să se arate că, dacă $z \in \mathbb{C}$ este o rădăcină a lui f, atunci $|z+i| = |z-i|$.

f) Să se arate că polinomul f are numai rădăcini reale.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)^{2004} - 2004x - 1$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $f(0)$ şi $f'(0)$.

c) Să se arate că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

d) Să se arate că $f(x) \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

e) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

f) Să se arate că $(x+1)^{2005} \geq 2005 \cdot 1002x^2 + 2005x + 1$, oricare ar fi $x \geq 0$.

SESIUNEA AUGUST-SEPTEMBRIE

M2

Filiera tehnologică, profil Servicii, toate specializările; profil Resurse naturale şi protecţia mediului, toate specializările

SUBIECTUL I

Pentru întrebările 1-5 scrieţi litera corespunzătoare răspunsului corect pe foaia de examen

1. Câte funcţii $f : \{a, b\} \to \{1, 2, 3\}$ au proprietatea $f(a) < f(b)$?

a) 1; **b)** 3; **c)** 2; **d)** 6

2. Câte elemente din mulţimea $\{1, 2, \ldots, 10\}$ se divid cu 3 sau 5?

a) 6; **b)** 3; **c)** 4; **d)** 5

3. Câte submulţimi ale mulţimii $\{1, 2, 3, 4\}$ sunt formate numai din numere pare?

a) 2; **b)** 3; **c)** 4; **d)** 5

4. Care este valoarea sumei $1 + 5 + 9 + \ldots + 49$?

a) 325; **b)** 300; **c)** 350; **d)** 375

5. Care este probabilitatea ca un element din mulţimea $\{11, 12, \ldots, 20\}$ să fie număr impar?

a) $0,4$; **b)** $0,5$; **c)** $0,6$; **d)** $0,7$

Pentru întrebările 6-10 scrieţi doar răspunsurile pe foaia de examen

Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$.

6. Cât este $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$?

7. Cât este $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$?

8. Câte asimptote verticale are graficul funcţiei f?

9. Cât este $\displaystyle\int_1^2 f'(x)\, dx$?

10. Cât este $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$?

Pentru subiectele II-IV se cer rezolvările complete

SUBIECTUL II

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele $d_1 : 2x + 3y = 5$, $d_2 : 3x + 2y = 5$ şi $d_3 : x - y = 0$ şi punctele $A(4, -1)$, $B(-1, 4)$ şi $C(2, 2)$. Notăm cu M punctul de intersecţie a dreptelor d_1 şi d_3.

a) Să se determine coordonatele punctului M.

b) Să se verifice că punctul M se află pe dreapta d_2.

c) Să se calculeze lungimea segmentului AB.

d) Să se calculeze aria triunghiului ABC.

e) Să se calculeze cosinusul unghiului $\sphericalangle ABC$.

f) Să se calculeze sinusul unghiului $\sphericalangle ABC$.

SUBIECTUL III

Se consideră numerele raţionale a_1, a_2,…, a_n,…, definite prin $a_1 = 4$, $a_2 = 8$ şi $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se determine numerele a_3, a_4, a_5 şi a_6

b) Să se verifice că $a_1 = a_7$ şi $a_2 = a_8$.

c) Să se determine numărul a_{2004}.

d) Câte elemente din şirul de numere a_1, a_2,. . .,a_{2004} sunt egale cu 2?

e) Să se calculeze suma $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2004}$.

f) Să se calculeze produsul $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{2004}$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

a) Să se determine ecuaţia asimptotei către $+\infty$ la graficul funcţiei f.

b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $f(-1)$, $f(1)$, $f'(-1)$ şi $f'(1)$.

d) Să se arate că $-1 \le f(x) \le 1$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

e) Să se arate că, dacă x, $y \in \mathbb{R}$ şi $f(x) + f(y) = 2$, atunci $x = y = 1$.

f) Dacă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcţiei f, să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{F(x)}{\ln(x^2)}$.

SESIUNEA AUGUST-SEPTEMBRIE

M2
Proba F

Filiera vocaţională, profil Artistic, specializările: Arhitectură, arte ambientale şi design; profil Militar, specializarea Ştiinţe sociale
Filiera teoretică, specializarea Ştiinţe sociale

SUBIECTUL I

Pentru întrebările 1-5 scrieţi litera corespunzătoare răspunsului corect pe foaia de examen

1. Câte submulţimi de trei elemente ale mulţimii $\{1, 2, \ldots, 8\}$ au toate elementele pare?

a) 3; **b)** 2; **c)** 4; **d)** 1

2. Care este probabilitatea ca un element din mulţimea $\{1, 2, \ldots, 10\}$ să nu fie pătrat perfect?

a) $0,3$; **b)** $0,2$; **c)** $0,7$; **d)** $0,4$

3. Cât este $(1+i)^4$?

a) -4; **b)** 4; **c)** $4i$; **d)** $-4i$

4. Care este suma primelor două zecimale ale numărului $\sqrt{11}$?

a) 7; **b)** 8; **c)** 6; **d)** 4

5. Cât este suma $1 + 3 + 5 + \ldots + 29$?

a) 225; **b)** 200; **c)** 275; **d)** 250

Pentru întrebările 6-10 scrieţi doar răspunsurile pe foaia de examen

Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - x$.

6. Cât este $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$?

7. Cât este $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$?

8. Cât este $\displaystyle\int_0^1 e^x \, dx$?

9. Câte puncte de extrem local are funcţia f?

10. Cum este funcţia f pe intervalul $(1, \infty)$: strict descrescătoare sau strict crescătoare?

Pentru subiectele II-IV se cer rezolvările complete

SUBIECTUL II

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(6, 7)$, $B(7, 6)$ şi $C(3, 8)$.

a) Să se scrie ecuaţia dreptei AB.

b) Să se calculeze lungimea segmentului AB.

c) Să se calculeze aria triunghiului ABC.

d) Să se calculeze cosinusul unghiului $\sphericalangle ABC$.

e) Să se determine numerele reale a şi b, astfel încât punctul $M(a, b)$ să verifice relaţiile $MA = MB = MC$.

SUBIECTUL III

Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie "$\circ$" definită prin $x \circ y = 2xy + 2x + 2y + 1$, oricare ar fi x, $y \in \mathbb{R}$.

a) Să se verifice că $x \circ y = 2(x+1)(y+1) - 1$, oricare ar fi $x,\ y \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$, oricare ar fi $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$.

c) Să se determine $e \in \mathbb{R}$ astfel încât $x \circ e = x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

d) Să se găsească două elemente $a,\ b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, cu proprietatea $a \circ b \in \mathbb{N}$.

e) Să se arate că, dacă $x \circ y = -1$, atunci $x = -1$ sau $y = -1$.

f) Să se arate că $(-2004) \circ (-2003) \circ \ldots \circ 0 \circ 1 \circ \ldots \circ 2003 \circ 2004 < 0$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

a) Să se calculeze $f'(x),\ x \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că funcţia f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$ şi este strict crescătoare pe intervalul $[0, \infty$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

d) Să se arate că dreapta $y = x$ este asimptota oblică către $+\infty$ la graficul funcţiei f.

e) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f'(x)\ dx$.

f) Să se rezolve ecuaţia $f(11x) + f(1984x) = f(21x) + f(2004x)$.