BACALAUREAT 2008
SESIUNEA IULIE

MT1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

SUBIECTUL I

1. Fie fracţia zecimală periodică $0,(769230) = 0,a_1a_2a_3\ldots$. Să se calculeze $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2008}$.

2. Să se arate că dreapta de ecuaţie $y = 2x - 1$ nu intersectează parabola de ecuaţie $y = x^2 + x + 1$.

3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\log_2 x + \log_4 x^2 = 6$.

4. Într-o clasă sunt 25 de elevi dintre care 13 sunt fete. Să se determine numărul de moduri în care se poate alege un comitet reprezentativ al clasei format din 3 fete şi 2 băieţi.

5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-1,1)$, $C(1,3)$ şi $D(a,4)$, $a \in \mathbb{R}$. Să se determine a pentru care dreptele AB şi CD sunt perpendiculare.

6. Ştiind că $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ şi că $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$, să se calculeze $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$.

SUBIECTUL II

1. Fie matricea $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Se notează cu X^t transpusa unei matrice pătratice X şi cu $\mathrm{Tr}(X)$ suma elementelor de pe diagonala principală a matricei X.

a) Să se demonstreze că $\mathrm{Tr}(A + A^t) = 2\mathrm{Tr}(A)$.

b) Să se demonstreze că dacă $\mathrm{Tr}(A \cdot A^t) = 0$, atunci $A = O_2$.

c) Să se demonstreze că dacă suma elementelor matricei $A \cdot A^t$ este egală cu 0, atunci $\det(A) = 0$.

2. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ şi mulţimea $K = \{aI_2 + bA \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

a) Să se arate că $A^2 \in K$.

b) Să se arate că mulţimea K este parte stabilă în raport cu înmulţirea matricelor din $\mathscr{M}_2(\mathbb{Q})$.

c) Să se arate că pentru orice $X \in K$, $X \neq O_2$ există $Y \in K$ astfel încât $X \cdot Y = I_2$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$.

a) Să se arate că graficul funcţiei f admite asimptotă orizontală spre $+\infty$.

b) Să se studieze monotonia funcţiei f.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{f(1) + f(2) + \ldots + f(n)}{n}\right)^n$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1 - x^2}\, dx$.

a) Să se calculeze I_1.

b) Să se arate că $(n + 2)I_n = (n - 1)I_{n-2}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

MT2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, specializarea toate calificările profesionale; profilul resurse, specializarea toate calificările profesionale; profilul tehnic, specializarea toate calificările profesionale.

SUBIECTUL I

1. Să se calculeze $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} - \sqrt[3]{\frac{8}{27}}$.

2. Se consideră funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5 - x$. Să se determine coordonatele punctului de intersecţie a graficelor funcţiilor f şi g.

3. Să se rezolve ecuaţia $3^{1-x} = 9$.

4. Să se rezolve ecuaţia $\log_5(x + 2) - \log_5(2x - 5) = 1$.

5. Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(1, -1)$ şi este paralelă cu dreapta $y = x$.

6. Să se calculeze perimetrul unui triunghi echilateral care are aria egală cu $\sqrt{3}$.

SUBIECTUL II

1. În $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B = I_3 + A$, unde $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $A \cdot B$.

b) Să se calculeze $A^2 + A^3$, unde $A^2 = A \cdot A$ şi $A^3 = A^2 \cdot A$.

c) Să se demonstreze că dacă $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ şi $A \cdot X = X \cdot A$, atunci există numerele reale a, b, c astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$ având rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine numărul real c ştiind că $f(1) + f(-1) = 2a + 1$.

b) Ştiind că $a = -3$, $b = 1$, $c = 1$, să se determine rădăcinile reale ale polinomului f.

c) Să se exprime în funcţie de numerele reale a, b, c determinantul $D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$.

a) Să se verifice că $f'(x) = -\frac{x}{e^x}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine asimptota către $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c) Să se arate că $f(x) \leq 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcţiile $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{x^n + 4}$.

a) Să se calculeze $\int (x + 4)^2 \cdot f_1(x)\, dx$, unde $x \in [0, 1]$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 x f_2(x)\, dx$.

c) Să se arate că aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei f_{2008}, axa Ox şi dreptele $x = 0$ şi $x = 1$ este un număr din intervalul $\left[\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right]$.

MT3

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare.

SUBIECTUL I

1. Să se determine $n \in \mathbb{N}$ pentru care $\sqrt{50} - \sqrt{128} + \sqrt{200} = \sqrt{n}$.

2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $x^2 + (m-1)x - m = 0$ să aibă rădăcini reale egale.

3. Triunghiul ABC are $AB = 10$, $m(\sphericalangle B) = 60°$ şi $m(\sphericalangle C) = 45°$. Să se calculeze lungimea laturii AC.

4. Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctele $A(3, -3)$ şi $B(1, 2)$.

5. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât numerele $x + 2$, $3x + 2$, $6x + 5$ să fie termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

6. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\lg^2 x + 5 \lg x + 6 = 0$.

SUBIECTUL II

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x \perp y = \dfrac{1}{2}(xy - x - y + 3)$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se demonstreze că $x \perp y = \dfrac{1}{2}(x-1)(y-1) + 1$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se verifice că legea de compoziţie "$\perp$" este asociativă pe $\mathbb{R}$.

c) Se consideră mulţimea $M = (1, +\infty)$. Să se arate că pentru oricare $x, y \in M$, rezultă că $x \perp y \in M$.

d) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $5^x \perp 3^{x-3} = 1$.

e) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţia $(x+2) \perp (x-3) < 1$.

f) Să se determine $n \in \mathbb{Z}$, astfel încât $x \perp x \perp x = 2^n \cdot (x-1)^3$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III

Se consideră matricele $A, I_3 \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $A - 2I_3$.

b) Să se calculeze $\det(2A)$.

c) Să se determine numărul real x pentru care $A^2 = A + xI_3$.

d) Să se arate că matricea $\dfrac{1}{2}A - \dfrac{1}{2}I_3$ este inversa matricei A.

e) Să se determine matricea $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ din ecuaţia matriceală $A \cdot X = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

f) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ pentru care $\det(A + xI_3) = x^3$.

SESIUNEA AUGUST

MT1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

SUBIECTUL I

1. Să se rezolve în mulţimea numerelor complexe ecuaţia $z^2 = -9$.

2. Să se determine $a \in \mathbb{R}^*$ pentru care ecuaţia $ax^2 + (3a-1)x + a + 3 = 0$ are soluţii reale.

3. Să se rezolve în mulţimea $[0, 2\pi]$ ecuaţia $\cos 4x = 1$.

4. Să se determine numărul funcţiilor $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ cu proprietatea că $f(1) = f(2)$.

5. Să se calculeze lungimea razei cercului înscris într-un triunghi care are lungimile laturilor 13, 14, 15.

6. Triunghiul ABC are $B = \frac{\pi}{6}$, $C = \frac{\pi}{4}\cdot$ Să se demonstreze că $\frac{AB}{AC} = \sqrt{2}$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

- **a)** Să se calculeze $\det(A)$.
- **b)** Să se determine A^{-1}.
- **c)** Să se arate că $(I_3 + A)^n = 2^{n-1}(I_3 + A)$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ considerăm polinomul $f_n = X^{3n} + 2X^2 - 4X - 1 \in \mathbb{C}[X]$.

- **a)** Să se arate că f_1 nu este divizibil cu polinomul $g = X - 2$.
- **b)** Să se determine suma coeficienţilor câtului împărţirii polinomului f_3 la $X - 1$.
- **c)** Să se arate că restul împărţirii polinomului f_n la polinomul $h = X^2 + X + 1$ nu depinde de n.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x - x^a$, $a > 0$.

- **a)** Să se calculeze $f'(1)$.
- **b)** Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x = a$.
- **c)** Să se arate că, dacă $f(x) \geq 0$, $(\forall)\ x > 0$, atunci $a = e$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n = \int_1^e \ln^n x \, dx$.

- **a)** Să se calculeze I_1.
- **b)** Să se arate că $I_n = e - nI_{n-1}$, $(\forall)\ n \geq 2$.
- **c)** Să se arate că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

MT2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, specializarea toate calificările profesionale; profilul resurse, specializarea toate calificările profesionale; profilul tehnic, specializarea toate calificările profesionale.

SUBIECTUL I

1. Să se calculeze suma $1 + 5 + 9 + 13 + \ldots + 25$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx^2 - mx + 2$, $m \in \mathbb{R}^*$. Să se determine numărul real nenul m ştiind că valoarea minimă a funcţiei este egală cu 1.

3. Să se calculeze $\log_2(\text{tg } 45°) + \log_2(\text{ctg } 45°)$.

4. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea $A = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \ldots, \sqrt{11}\}$, acesta să fie iraţional.

5. Să se determine ecuaţia dreptei care conţine punctul $A(2, -3)$ şi este paralelă cu dreapta $x + 2y + 5 = 0$.

6. Să se calculeze lungimea laturii BC a triunghiului ABC ştiind că $AB = 6$, $AC = 10$ şi $m(\sphericalangle A) = 60°$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ şi $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

a) Să se scrie sistemul asociat ecuaţiei matriceale $A \cdot X = B$.

b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $\det(A) = 0$.

c) Dacă $a \in \mathbb{R} \backslash \{2, 6\}$ şi (x_0, y_0, z_0) este soluţia sistemului $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + ay + z = 1 \\ 2y + 3z = 1 \end{cases}$, să se demonstreze că $\dfrac{x_0}{z_0}$ nu depinde de a.

2. Se consideră polinomul $f = (X + 1)^{2008} + (X - 1)^{2008}$ având forma algebrică $f = a_{2008}X^{2008} + \ldots + a_1X + a_0$, unde a_0, a_1, …, a_{2008} sunt numere reale.

a) Să se calculeze $f(-1) + f(1)$.

b) Să se determine suma coeficienţilor polinomului f.

c) Să se determine restul împărţirii lui f la $X^2 - 1$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x - x$.

a) Să se verifice că $f'(x) = \ln x$ pentru orice $x > 0$.

b) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 1$.

c) Să se demonstreze că funcţia f este convexă pe $(0, +\infty)$.

2. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcţiile $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n + 1$.

a) Să se determine $\displaystyle\int f_1(x)\, dx$, unde $x \in [0, 1]$.

b) Să se calculeze aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{f_1(x)}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = 1$.

c) Să se arate că $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{f_n(x)}\, dx \leq \sqrt{2}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

MT3

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare.

SUBIECTUL I

1. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=0 \end{cases}$, $x,\ y \in \mathbb{R}$.

2. Să se calculeze $S = \log_3 27 + \log_{\frac{1}{3}} 3 - \log_{\sqrt{3}} 1 + \log_3 \sqrt{3}$.

3. Să se afle suma primilor 10 termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_1 = 3$ şi $a_5 = 11$.

4. Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(1,-1)$ şi este perpendiculară pe dreapta de ecuaţie $x+y+1=0$.

5. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(0,5)^{x^2-4} = (0,125)^{2+x}$.

6. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC, ştiind că $BC = 12$, $m(\sphericalangle A) = 60°$, $m(\sphericalangle B) = 75°$.

SUBIECTUL II

Pe mulţimea $H = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este civizor al lui } 12\}$ se defineşte legea de compoziţie $x \star y = \text{c.m.m.d.c }(x, y)$, $(\forall)\ x$, $y \in H$.

a) Să se precizeze elementele mulţimii H.

b) Să se arate că pentru oricare $x,\ y \in H$, rezultă că $x \star y \in H$.

c) Să se verifice că $[(12 \star 6) \star 4] \star 2 = 12 \star [6 \star (4 \star 2)]$.

d) Să se rezolve ecuaţia $6 \star x = 2$.

e) Să se demonstreze că legea de compoziţie ”$\star$” este asociativă pe H.

f) Să se demonstreze că legea de compoziţie ”$\star$” are element neutru pe H.

SUBIECTUL III

Se consideră mulţimea de matrice $M = \left\{ A(a) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})\ A(a) = \begin{pmatrix} a^2-4 & -1 \\ a-2 & 2a-1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$ şi matricele $B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $A(a) = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

b) Să se calculeze $C = 2\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

c) Să se verifice că $B^2 = -2B - 4I_2$.

d) Să se calculeze $\det A(3)$.

e) Să se arate că dacă matricea $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ îndeplineşte condiţia $X^2 + 2X + 4I_2 = O_2$, atunci $X^3 = 8I_2$.

f) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $\det A(3) = 0$.